高考试题分析

2027年版

数学

教育部教育考试院　编

中国教育出版传媒集团　语文出版社

GAOKAO SHITI FENXI

SHUXUE

高考试题分析

数学

2027年版

教育部教育考试院　编

中国教育出版传媒集团　语文出版社

·北京·

著作权人已授权语文出版社有限公司独家出版发行本作品。未经授权，任何机构、个人不得以任何形式擅自使用（包括但不限于以非法方式复制、传播等）、转载、摘编或利用其他方式使用本作品全部或部分内容。

图书在版编目（CIP）数据

高考试题分析. 2027年版 数学 / 教育部教育考试院编. -- 北京 : 语文出版社, 2026. -- ISBN 978-7-5187-2795-7

Ⅰ. G634

中国国家版本馆CIP数据核字第2026NA1231号

责任编辑 王文杰
装帧设计 刘姗姗
出　　版 语文出版社
地　　址 北京市东城区朝阳门内南小街51号
电子信箱 ywcbsywp@163.com
排　　版 语文出版社照排室
印刷装订 保定市中画美凯印刷有限公司
发　　行 语文出版社 新华书店经销
规　　格 787 mm × 1092 mm
开　　本 1 / 16
印　　张 15.75
字　　数 236千字
版　　次 2026年7月第1版
印　　次 2026年7月第1次印刷
定　　价 60.00元

010-65253954（咨询） 010-65237687（购书） 010-65250075（印装质量）

出版说明

2026 年全国高考已顺利结束。为进一步发挥高考试题的育人功能和导向作用，帮助 2027 年参加高考的学生准确把握试题特点、有效复习备考，引领高中各学科教师进一步转变教学观念、提升课堂质量，启发考试命题人员和教研人员把握高考改革方向、理解高考核心功能，教育部教育考试院组织编写了《高考试题分析（2027 年版）》丛书，并独家授权语文出版社编辑出版。

教育部教育考试院命制的 2026 年高考试题，体现出鲜明的特色。一是坚持立德树人，促进学生健康成长和全面发展。试题有机融入习近平新时代中国特色社会主义思想，加强培育社会主义核心价值观，大力弘扬中华优秀传统文化、革命文化和社会主义先进文化，强调德智体美劳全面发展，注重五育并举，深入挖掘试题素材蕴含的育人价值，形成润物细无声的效果。二是坚持教考衔接，引导学生夯实基础、提升能力、发展素养。试题聚焦高校人才选拔要求，注重考查学生对基础知识、基本技能、基本方法的理解和掌握，引导高中教学回归课标、回归课堂，筑牢发展的根基；注重通过优化内容、丰富题型、设置真实的问题情境，考查学生解决实际问题的关键能力，有效鉴别学生发展潜质。三是坚持面向未来，服务拔尖创新人才自主培养。试题通过展现国家科技发展成果、加强科学实验考查等方式，引导学生崇尚科学，积极参与科学活动；通过优化试卷结构、丰富呈现方式、创新设问角度，拓展思维考查的空间，强化思维过程和思维方式的考查；通过增强试题的开放性设计，鼓励学

生灵活运用所学知识、举一反三，从不同角度提出解决问题的新思路和新方法，展现创新意识和创新精神。

这套丛书包括语文、数学、英语、思想政治、历史、地理、物理、化学、生物学、日语和俄语等11个学科，每个学科独立成册，每个分册包含2026年高考全国卷试题，除呈现原题、提供参考答案外，还围绕上述三大特色具体阐释，点明考查目标和试题亮点，点拨解题思路，具有很强的针对性、实用性和权威性，为2027年高考复习指明了方向。我们相信这套丛书对广大读者定能有所裨益，高三学生借之把握考查重点，领悟解题方法，减少死记硬背和机械刷题；高中教师借之转变教学观念，提升教学质量；考试命题人员、教研人员等教育工作者借之准确把握高考动向，更好地开展命题和教学研究工作。

刷题千遍，不如精解一道真题。本套丛书附2023—2025年高考全国卷。全国卷试题典型性强，紧扣命题方向，利于考生精准查漏补缺，系统梳理考点，告别低效重复的机械练习，真正实现以题促学、以题提分。

由于时间仓促，书中难免存在种种不足，我们恳切地希望广大读者提出宝贵的意见和建议。

目　　录

一、2026 年高考数学全国卷试题评析 …………………………………… 1

二、2026 年高考数学全国卷试题精解 …………………………………… 4

全国Ⅰ卷 …………………………………………………………………… 4

全国Ⅱ卷 …………………………………………………………………… 62

2023—2025 年高考全国卷及参考答案（另附单册）

一、2026年高考数学全国卷试题评析

2026年高考数学全国卷试题加强基础考查，引导学生构建系统化、结构化的数学知识体系；试卷优化整体结构，创新试题情境设计，借助开放性设问鼓励学生开展多路径探究与论证，将考查重心聚焦于学生的思维品质与核心素养，突出对思维过程的考查。

（一）锚定教考衔接，确保依据课标不超标，回归课堂不脱节

2026年高考数学试题严格依据普通高中数学课程标准（以下简称“课标”）命制，考查范围、能力要求、素养导向均与课标内容一致，考查的知识点全部限定于必修课程、选择性必修课程内容范筹。各部分考查内容的比例与课标中各部分课程内容所占课时比例大体一致。试题加强对主干知识、核心概念理解深度的考查，着重考查学生对数学本质的理解。发挥高考对教学积极的反拨作用，引导中学严格按照课标实施教学，做到应教尽教，避免盲目赶进度、超标教学或引入高等数学内容，促进学生打好基础、增强能力、提高素养。

（二）强化数学基础，检测学生知识体系，支撑学科素养提升

基本概念和基本原理是数学大厦建设的基石。2026 年高考数学命题采取有效措施，加强基础考查。

高考数学注重检测学生的知识体系是否完备，帮助学生构建系统化、结构化的知识体系。试卷全面考查基础知识，力图覆盖高中数学的重要知识内容，检验学生对知识的掌握程度，引导中学注重基础知识教学，打牢学生的知识基础。

高考数学强化对基础知识的理解与基本方法的应用，强调把基本原理应用于解题实际，让学生明白仅仅依靠总结解题技巧、应用二级结论无法应对考试，强化基础才是解题的关键。例如，全国Ⅰ卷和Ⅱ卷的解析几何试题打破固有模式，创新考查了解析几何研究问题的基本方法，引导中学打破单纯通过背题型、套公式来获取高分的模式。

（三）聚焦数学本质，展示思维过程，检测思维品质

高考的结果不但要反映学生在中学阶段的学习成果，检测学生的思维能力和思维品质，更要预测学生在大学的学习表现和发展潜力。

一是优化试卷结构，为深度思考留出时间。2026 年高考数学试卷继续保持全卷 19 题的题量，让学生有充足的时间去分析和思考，从而充分展示其思维品质。试卷灵活科学地安排试题顺序，如全国Ⅰ卷，起始题采用统计、向量、集合的排列顺序，同时把立体几何排在解答题起始题的位置等，要求学生必须针对每道题进行真实的现场思考，引导学生改变机械刷题的习惯。

二是贯彻多想少算理念，聚焦数学本质。2026 年高考数学试题通过科学的设计，充分利用题目中数据的特点、图形的对称性、向量的几何意义等，让善于思考的学生能够找到路径，大幅压缩计算量。如全国Ⅰ卷第 8 题概率统计试题，可利用随机变量取值的对称性简化计算；全国Ⅰ卷第 18 题解析几何试题，将平面几何与三角函数相结合可简化计算；

全国Ⅱ卷第11题的选项C，直接求相关点的坐标计算量很大，而利用向量的点积运算判断角度大小，则可以快速解决问题。

（四）深化情境设计，突出探索性，体现创新性

2026年高考数学试卷通过优化情境设计，突出探索性，着重考查思维创新。

一是创设新颖情境，打破固有刷题套路。高考数学试卷通过设计新颖的试题情境和呈现方式，要求学生摒弃以往的解题模板，在考场上进行真实的现场探索。如全国Ⅰ卷第19题，创设了创新情境，考查学生在新情境下进行分析、探索、论证的能力；全国Ⅱ卷第15题引入了现实情境，通过图表给出了电子产品首次出现故障的时间，让学生经历观察、分析、论证的思维过程，考查学生应用数学知识和方法解决实际问题的综合能力。

二是增强开放性和探究性，考查发散思维和创新思维。高考数学试卷通过设置具有开放性和探索性的试题，鼓励学生运用发散性思维，真正理解数学概念。如全国Ⅱ卷第18题中的曲线，因为参数取值不同，导致方程对应不同类型的曲线，使问题具有开放性，学生需要进行探索和尝试才能确定曲线类型；全国Ⅰ卷第7题的问题取材于宁夏回族自治区青铜峡市的一百零八塔，试题根据各行塔数和总塔数的数字特征，设置了探究式的全新情境，为学生留下了思考和发挥才能的空间。开放性和探索性问题要求学生提出假设、论证结论，提高了思维强度，提升了试题区分度，既能测量学生的真实水平，又能筛选出具备持续学习与创新潜力的人才。

三是创新设问方式，考查高阶思维品质。试题通过创设新设问，重点考查学生的逻辑推理、批判性思维和创新思维等关键能力，减少机械计算，避免学生靠套公式或猜答案得分，需要学生根据自身的认知选择最优策略。如全国Ⅰ卷和Ⅱ卷的第19题均采取递进式的探究设问，由浅入深、层层递进，前一问为后一问做铺垫，后一问是前一问的深入和发展。同时，两题都需要根据情况进行分类推理讨论，引导学生逐步深入探索问题的本质，考查连贯、严谨的大跨度思维过程，考查思维的条理性、严谨性和批判性。

二、2026年高考数学全国卷试题精解

全国Ⅰ卷

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅰ卷第1题

【试题】

样本数据6，8，4，5，12的中位数为

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 9

【参考答案】 B

【考查目标】

本题考查统计学中样本的数字特征，考查学生对样本中位数概念的理解.

【试题分析】

将题目所给的5个样本数据按从小到大排列，得到4，5，6，8，12.

由中位数的定义知，这组样本数据的中位数为 6，故选 B.

一般地，一组数据的第 p 百分位数是这样一个值，它使得这组数据中至少有 $p\%$ 的数据小于或等于这个值，且至少有 $(100-p)\%$ 的数据大于或等于这个值. 可以通过下面的步骤计算一组 n 个数据的第 p 百分位数：

第 1 步，按从小到大排列原始数据；

第 2 步，计算 $i=n\times p\%$；

第 3 步，若 i 不是整数，而大于 i 的比邻整数为 j，则第 p 百分位数为第 j 项数据；若 i 是整数，则第 p 百分位数为第 i 项与第 $(i+1)$ 项数据的平均数.

特别地，中位数(即第 50 百分位数)较为容易得到. 对如本题所给的奇数个样本数据而言，设共有 $(2k+1)$ 个数据(k 是自然数)，则按从小到大重新排列原始数据后，第 $(k+1)$ 个数据即为中位数.

【试题亮点】

统计的研究对象是数据，核心是通过数据分析研究和解决问题. 统计学中，常使用平均数、中位数、众数、方差、极差等统计量对数据进行初步的分析和刻画，它们在不同意义下描述了数据的集中趋势或离散程度. 在现实生活中，为对总体的情况作出估计和推断，常见的做法是利用各种抽样方法获取一定容量的样本数据，并获得样本的规律，进而利用样本的规律估计总体的规律，解决相应的实际问题.

试题求一组具体样本数据的中位数，学生只要掌握样本中位数的概念就可得到正确答案. 试题作为整套试卷的第 1 小题，立足课标，考查基础内容，作答时只需排列大小，无需复杂计算. 考查指向明确，符合学生预期，利于学生得分. 特别地，题目以学生十分熟悉的知识形态呈现，有利于消除学生考前的紧张情绪，稳定学生情绪与考试心态，提高学生的考试信心，助力学生正常发挥.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅰ卷第2题

【试题】

已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $2\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，则

A. $x=2$，$y=-3$　　B. $x=-2$，$y=3$

C. $x=2$，$y=3$　　D. $x=-2$，$y=-3$

【参考答案】 A

【考查目标】

试题以平面向量为素材，考查学生对向量相等的理解和对平面向量基本定理的掌握及运用. 学生只要使用平面向量基本定理并比较等式两边便可得到正确答案.

【试题分析】

平面向量基本定理的内容为：若平面内两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则对该平面内任意一个向量 $\boldsymbol{c}$，存在唯一的实数对 (x, y)，使得 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$. 当 $\boldsymbol{c}$ 取定后，满足 $\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 的 (x, y) 是存在的且是唯一的，而当 (x, y) 确定后，$\boldsymbol{c}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ 也是确定的. 也就是说，平面向量 $\boldsymbol{c}$ 和实数对 (x, y) 之间按照此种方式的对应是一一对应.

思路1　直接使用平面向量基本定理.

设 $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，由平面向量基本定理，实数对 $(2, y)$ 与 $(x, -3)$ 相等，所以 $x=2$，$y=-3$. 故选 A.

思路2　运用平面向量基本定理的证明思路.

由题意得 $(2-x)\boldsymbol{a}+(y+3)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 如果 $2-x\neq0$，那么 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{y+3}{2-x}\boldsymbol{b}$，与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线相矛盾. 如果 $y+3\neq0$，那么 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{2-x}{y+3}\boldsymbol{a}$，与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 不共线相矛盾.

故 $2-x=y+3=0$，所以 $x=2$，$y=-3$. 故选 A.

思路 3 考虑特例.

设 $\boldsymbol{a}=(1,\ 0)$，$\boldsymbol{b}=(0,\ 1)$，则由题意得 $(2,\ y)=(x,\ -3)$，所以 $x=2$，$y=-3$. 故选 A.

思路 4 使用排除法.

由题意得 $(2-x)\boldsymbol{a}+(y+3)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 当 $x=-2$，$y=3$ 时，$(2-x)\boldsymbol{a}+(y+3)\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}$；当 $x=2$，$y=3$ 时，$(2-x)\boldsymbol{a}+(y+3)\boldsymbol{b}=6\boldsymbol{b}$；当 $x=-2$，$y=-3$ 时，$(2-x)\boldsymbol{a}+(y+3)\boldsymbol{b}=4\boldsymbol{a}$，它们都不是零向量. 由此排除选项 B，C，D，故选 A.

【试题亮点】

向量是数学研究的重要对象和工具，在其他学科也有重要应用. 向量既是代数研究对象，也是几何研究对象，是沟通几何与代数的桥梁. 试题考查向量的概念、共线向量的定义、向量相等的定义以及平面向量基本定理等知识. 试题内容源于教材，学生可以通过直接比较得到答案，体现了试题“回归教材”的设计理念.

试题作为整套试卷的第 2 小题，立足基本概念和方法，计算量小，考查指向明确，符合学生预期，利于学生得分. 特别地，题目以学生较熟悉的知识形态呈现，有利于学生正常发挥.

【试题出处】2026 年高考数学全国 I 卷第 3 题

【试题】

已知集合 $A=\left\{\sin\dfrac{7\pi}{6},\ \cos\dfrac{5\pi}{3},\ \tan\dfrac{5\pi}{4}\right\}$，$B=\left\{-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 1\right\}$，则 $A\cap B=$

A. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$ B. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right\}$

C. $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ D. $\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right\}$

【参考答案】 C

【考查目标】

试题以集合的表示方法，特殊角的三角函数值和集合的交集等基础知识为背景，考查集合的概念与基本运算，以及学生对三角函数的理解和掌握.

【试题分析】

集合 B 的元素是已知的，集合 A 的元素虽然已知，但涉及特殊角的三角函数值，故计算出三角函数值，就可以得到结果.

由诱导公式得 $\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$，$\cos\frac{5\pi}{3}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，$\tan\frac{5\pi}{4}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{4}=1$，故 $A=\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$，所以 $A\cap B=\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$，故选 C.

【试题亮点】

试题用列举法给出集合的元素，要求两个集合的交集，考查集合的概念和集合的基本运算，体现了课标对集合学习的基本要求.

试题不拘泥于常见形式，将特殊角的三角函数值作为集合的元素，需要学生用诱导公式求得三角函数值，达到考查学生对三角函数的理解和掌握的目的，体现了试题的基础性和综合性.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅰ卷第4题

【试题】

曲线 $y=5x+8\ln x$ 在点(1, 5)处的切线方程为

A. $y=3x+2$ B. $y=5x$

C. $y=8x-3$ D. $y=13x-8$

【参考答案】 D

【考查目标】

试题以求已知曲线在一点处的切线方程为背景，考查求导法则、导数的几何意义以及导数在研究曲线的切线方程中的应用.

【试题分析】

由于 $y'=5+\dfrac{8}{x}$，故当 $x=1$ 时 $y'=13$，所以曲线 $y=5x+8\ln x$ 在点(1, 5)处的切线方程为 $y-5=13(x-1)$，即 $y=13x-8$. 故选 D.

【试题亮点】

试题以学生熟悉的知识呈现，突出基本概念和基本方法的考查，面向了全体学生，体现了对学生的人文关怀.

试题题干简洁，设问常规，素材来源于教材，科学引导中学数学教学回归基础、回归教材，对促进教考衔接有很好的指导作用.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅰ卷第5题

【试题】

已知抛物线 C_1：$y^2=2p_1x(p_1>0)$ 和 C_2：$x^2=2p_2y(p_2>0)$ 均经过点 $(4,8)$，则 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离为

A. 12　　B. $4\sqrt{5}$　　C. 6　　D. $\frac{\sqrt{65}}{2}$

【参考答案】 D

【考查目标】

试题考查学生对抛物线标准方程和简单几何性质的理解，学生的直观想象能力和数学运算能力，以及对运用解析几何解决问题的基本思路和数形结合的数学思想的掌握.

【试题分析】

由题设可知 $64=8p_1$，$16=16p_2$，解得 $p_1=8$，$p_2=1$.

所以抛物线 C_1，C_2 的标准方程分别为 $y^2=16x$，$x^2=2y$. 故 C_1，C_2 的焦点坐标分别为 $(4,0)$，$\left(0,\frac{1}{2}\right)$. 所以 C_1 的焦点与 C_2 的焦点之间的距离 $d=\sqrt{(4-0)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{2}$. 故选D.

【试题亮点】

数与形是贯穿平面解析几何问题的核心. 学生需要能将代数表达转化为几何特征，将几何特征翻译为代数表达. 试题立足基础概念，考查知识的灵活运用与数形结合的思想方法，有助于正向引导教学，促进提升学生的直观想象、数学运算等核心素养，提高综合运用所学知识解决

问题的能力.

【试题出处】2026 年高考数学全国 I 卷第 6 题

【试题】

已知函数$f(x)=\dfrac{x+2}{e^x+a}$的最大值为 1，则 $a=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　　B. 1　　　C. $\dfrac{3}{2}$　　　D. 2

【参考答案】　B

【考查目标】

试题以已知含参数函数的最大值求参数为背景，考查求导公式、求导法则、函数最值的概念以及利用导数研究函数最值的方法，并综合考查学生灵活运用数学知识分析问题和解决问题的能力.

【试题分析】

由题设可得 $a\geqslant0$(根据函数特点亦可推断出 $a\geqslant0$).

思路 1　设$f(x)$的最大值在 $x=x_0$ 处取得，则由题设可得$\begin{cases}f'(x_0)=0,\\ f(x_0)=1.\end{cases}$

由于$f'(x)=\dfrac{e^x+a-(x+2)e^x}{(e^x+a)^2}$，所以$\begin{cases}e^{x_0}+a-(x_0+2)e^{x_0}=0,\\ \dfrac{x_0+2}{e^{x_0}+a}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=0,\\ a=1.\end{cases}$故选 B.

思路 2　由于 $a\geqslant0$，$e^x\geqslant x+1$，故$f(x)-1=\dfrac{x+2-e^x-a}{e^x+a}\leqslant\dfrac{1-a}{e^x+a}$. 从而可

得，当 $a>1$ 时，$f(x)<1$，不符合题意；当 $a=1$ 时，$f(x)\leqslant 1$，且等号在 $x=0$ 时成立.

又当 $0\leqslant a<1$ 时，$f(0)=\dfrac{2}{1+a}>1$，不符合题意. 故选 B.

思路 3 由于 $a\geqslant 0$，且 $\dfrac{x+2}{e^x+a}\leqslant 1$，从而可得 $a\geqslant x+2-e^x$.

设函数 $g(x)=x+2-e^x$，则 $g'(x)=1-e^x$，故当 $x<0$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$g'(x)<0$. 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递增，在 $(0, +\infty)$ 单调递减，从而 $g(x)$ 的最大值为 $g(0)=1$，故 $a\geqslant 1$.

当 $a>1$ 时，$a>x+2-e^x$，故 $\dfrac{x+2}{e^x+a}<1$，不符合题意. 当 $a=1$ 时，$a\geqslant x+2-e^x$，故 $\dfrac{x+2}{e^x+a}\leqslant 1$，且当 $x=0$ 时等号成立.

综上可得，$a=1$ 符合题意，故选 B.

【试题亮点】

试题全面考查函数的导数知识，在考查函数的导数、利用导数求函数最值的方法等知识的同时，考查学生的逻辑推理能力、数学运算能力、主动探究能力以及灵活运用函数的导数解决数学问题的能力.

试题设置的函数含有参数，使得学生不能直接求出导数的零点，从而需要学生打破常规思路，运用转化与化归的思想，可以利用最大值与极值的关系，将问题转化为方程组，通过解方程组得到结果；或者将题目所给最大值的条件转化为不等式，通过研究不等式求解，让学生的主动探究能力以及灵活运用数学知识解决问题的能力得到充分考查.

试题注重解题思路的多元性和解题方法的灵活性. 本题如果将条件"函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x+a}$ 的最大值为 1"改为"函数 $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x+a}$ 的极大值为 1"，也可得到 $a=1$ 的结论，但限制了学生的思路. 试题的设计使得解法多样，使学生有不同思维的展示空间.

试题题干简洁，设问常规，考查的知识和方法基本，计算量及难度恰当. 试题紧贴教材，契合课标，突出对数学基础知识和思维能力的考查，符合基础性、应用性和创新性的考查要求.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 I 卷第 7 题

【试题】

一百零八塔位于宁夏回族自治区青铜峡市，以其独特的建筑格局和深远的历史文化闻名遐迩. 该塔群共有 108 座塔，依山势自上而下排成 12 行，将第 i 行中塔的座数记为 $a_i(i=1, 2, \cdots, 12)$，其中 $a_1=1$，$a_2=a_3=3$，$a_4=a_5=5$，且 a_6，a_7，…，a_{12}是一个首项为 7，公差为 2 的等差数列. 将 a_1，a_2，…，a_{12}分为 6 组，每组 2 个数，使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为 $d(d>0)$ 的等差数列，则 $d=$

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

【参考答案】 B

【考查目标】

试题主要考查等差数列的通项公式及求和等基础知识，考查分类讨论等数学思想以及灵活运用所学知识分析问题与解决问题的能力.

【试题分析】

由题意知，可将 1，3，3，5，5，7，9，11，13，15，17，19 分为 6 组，每组 2 个数，使得每组的 2 个数之和可构成一个项数为 6 且公差为 $d(d>0)$ 的等差数列. 设该等差数列为 b_1，b_2，…，b_6，故 $6b_1+15d=108$，即 $2b_1+5d=36$，其中 $b_1\geqslant 4$，$d>0$.

思路 1 注意到 $a_i(i=1, 2, \cdots, 12)$ 均为奇数，故 $b_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 均为偶数且 d 也为偶数. 不妨设 $b_1=2m(m\geqslant 2)$，$d=2s(s\geqslant 1)$，由 $2b_1+5d=36$ 知，$2m+5s=18$，从而 s 为偶数. 又 $5\leqslant 5s=18-2m\leqslant 14$，所以 $s=2$，$d=4$.

当 $d=4$ 时，可取 $b_1=a_2+a_4=3+5=8$，$b_2=a_1+a_8=1+11=12$，$b_3=a_3+a_9=3+13=16$，$b_4=a_5+a_{10}=5+15=20$，$b_5=a_6+a_{11}=7+17=24$，$b_6=a_7+a_{12}=9+19=28$. 故选 B.

思路 2 注意到 $a_i(i=1, 2, \cdots, 12)$ 均为奇数，故 b_1 为偶数，于是 $2b_1$ 是 4 的倍数. 由 $2b_1+5d=36$ 知 d 是 4 的倍数，故正确答案只能是 B 或 D. 又 $5\times 8=40>36$，所以 $d=4$. 故选 B.

思路 3 注意到 $a_i(i=1, 2, \cdots, 12)$ 均为奇数，故 $b_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 均为偶数且 d 也为偶数. 由 $2b_1+5d=36$ 知 d 是 4 的倍数. 又由 $b_1\geqslant 4$，$b_6\leqslant 17+19=36$ 知，$d\leqslant\dfrac{36-4}{5}=6.4$，所以 $d=4$. 故选 B.

思路 4 注意到 $a_i(i=1, 2, \cdots, 12)$ 均为整数，故 $b_1, b_2, \cdots, b_6$ 为整数，于是 d 是整数. 由 $2b_1+5d=36$ 和 $b_1\geqslant 4$，$d>0$ 知，$(b_1, d)\in\{(8, 4), (13, 2)\}$. 又 $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$ 中任意两个数之和不可能为 13，所以 $b_1=8$，$d=4$. 故选 B.

【试题亮点】

一百零八塔位于我国宁夏回族自治区青铜峡市黄河大峡谷内，始建于西夏，凭借独特的建筑布局、厚重的西夏历史与悠远的佛教文化闻名于世，是极具代表性的古塔建筑群. 一百零八塔是全国重点文物保护单位，坐西面东，背山望水，见证了宁夏平原的金戈铁马，多民族交融交流的过程. 该塔群共有 108 座塔，依山势自上而下排成 12 行，每一行中塔的座数均为奇数，分别为 1，3，3，5，5，7，9，11，13，15，17，19，规模宏大，气势雄伟.

正奇数按从小到大排成的数列是公差为 2 的等差数列，其前 n

项之和为 n^2，是一类有趣的数列. 数学中很多问题与其密切相关，包括数论中的素数分布，分析中的幂级数展开，如莱布尼兹级数 $\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$. 另外，该数列在电子工程中的信号发生器设计、音频处理中的音色合成和对称性的建筑设计等领域也有广泛的应用. 一百零八塔的建筑方式蕴含正奇数数列的前 10 项，是我国古代建筑智慧和数学美的完美结合.

试题考查等差数列的通项公式及求和等基础知识，考查分类讨论等数学思想以及灵活运用所学知识分析问题与解决问题的能力. 试题通过塔的座数均为奇数推出任意两项之和均为偶数的推理设置，有效考查了学生对数字特征的敏感性，而这一特性也是数学素养的重要组成部分. 试题设置对中学教学有很好的引导作用，给广大教师和学生留下很多思考和发挥才能的空间. 比如注意到 $12=2\times2\times3$，所以数列 a_1，a_2，…，a_{12} 的分组数可以是 3 组、4 组或 6 组. 本题仅考虑最简单的分组方式，即分为 6 组，其余情形留给教师和学生去开展研究. 尽管符合题意的 6 组之和组成的数列是唯一的，但分组方法有多种. 比较自然的分组方法是，将重复的 3 和 5 分在第一组得到首项，利用两个等差数列对应项的和还是等差数列这一基本性质，再将其余的 10 个数拆成两个公差为 2 的等差数列 1，3，5，7，9 和 11，13，15，17，19，最后将这两个数列的对应项分到同一组即可得到后面 5 个组. 事实上，不同的分组方法共有 8 种：

$\{1,7\}$，$\{3,9\}$，$\{3,13\}$，$\{5,15\}$，$\{5,19\}$，$\{11,17\}$；

$\{1,7\}$，$\{3,9\}$，$\{5,11\}$，$\{3,17\}$，$\{5,19\}$，$\{13,15\}$；

$\{3,5\}$，$\{1,11\}$，$\{3,13\}$，$\{5,15\}$，$\{7,17\}$，$\{9,19\}$；

$\{3,5\}$，$\{1,11\}$，$\{7,9\}$，$\{3,17\}$，$\{5,19\}$，$\{13,15\}$；

$\{3,5\}$，$\{3,9\}$，$\{1,15\}$，$\{7,13\}$，$\{5,19\}$，$\{11,17\}$；

$\{3,5\}$，$\{3,9\}$，$\{5,11\}$，$\{1,19\}$，$\{7,17\}$，$\{13,15\}$；

$\{3,5\}$，$\{5,7\}$，$\{1,15\}$，$\{3,17\}$，$\{11,13\}$，$\{9,19\}$；

{3，5}，{5，7}，{3，13}，{1，19}，{9，15}，{11，17}.

试题面向所有学生，通过直接给出一百零八塔每行塔的座数来保证背景的公平性，难度不大，答案设计暗含对新数列公差为偶数的提示，指向明确. 学生熟悉数列通项与求和就能发现新数列为偶数数列且公差为偶数后，通过列举法、排除法或首末项确定公差范围就可以快速得到答案，体现了“多想少算”的考查理念.

试题契合了课标中德育、智育和美育理念，让广大学生既惊叹于我国壮丽的山河美景，又能感受我国悠久的历史文化. 数学美和建筑智慧的有机结合能激发学生的学习兴趣，引导学生将所学理论知识与实际相结合. 试题从生活中来，再到生活中去，有利于培养学生的探究精神和实践精神，增强学生的家国情怀.

【试题出处】 2026年高考数学全国Ⅰ卷第8题

【试题】

设 $U=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\{-2,-1,1,2\},i=1,2,3\}$ 为空间中64个点构成的集合. 点 $P(1,1,1)$，记样本空间 $\Omega=\complement_U\{P\}$. 从 Ω 中随机取一个点，定义随机变量 X 如下：对 Ω 中的每个点 $A(x_1,x_2,x_3)$，令 $X(A)=x_1+x_2+x_3$，则 X 的数学期望为

A. $-\dfrac{1}{21}$　　B. $-\dfrac{1}{63}$　　C. 0　　D. $\dfrac{1}{7}$

【参考答案】 A

【考查目标】

试题以古典概型为素材，考查学生对古典概型的理解以及运用整体思想分析问题、解决问题的能力.

【试题分析】

古典概型具有以下两个特征：

(1)有限性：样本空间的样本点只有有限个；

(2)等可能性：每个样本点发生的可能性相等.

由题意知，$\text{card}(\Omega)=63$，且模型为古典概型. 因此只需求出Ω中的每个点A的$X(A)$之和，再除以63即可.

思路1 在Ω中进行配对.

设点$Q(-1,-1,-1)$，则对任意$(x_1,x_2,x_3)\in \complement_{\Omega}\{Q\}$，有$(-x_1,-x_2,-x_3)\in \complement_{\Omega}\{Q\}$. 将这样的两个点配成一对，它们的$X$之和等于0. 故$\Omega$中的所有点$A$的$X(A)$之和就等于$X(Q)$，即为$-3$. 所以$X$的数学期望为$-\frac{3}{63}=-\frac{1}{21}$. 故选A.

思路2 在U中进行配对.

将原题中X的定义推广到U中（即补充定义$X(P)=1+1+1=3$）. 对任意$(x_1,x_2,x_3)\in U$，有$(-x_1,-x_2,-x_3)\in U$. 将这样的两个点配成一对，它们的X之和等于0. 故U中的所有点A的$X(A)$之和就等于0，这就说明了Ω中的所有点A的$X(A)$之和等于$-X(P)$，即为-3. 所以X的数学期望为$-\frac{3}{63}=-\frac{1}{21}$. 故选A.

思路3 在Ω中分别计算横、纵、竖坐标的和.

由题意知，U中的64个点中，横坐标为-2，-1，1，2的各有16个，所以Ω中的63个点中，横坐标为-2，-1，2的各有16个，横坐标为1的有15个. 因此Ω中的所有点的横坐标之和为$(-2)\times16+(-1)\times16+1\times15+2\times16=-1$. 同理可知，$\Omega$中的所有点的纵坐标之和与竖坐标之和也均为$-1$. 所以$X$的数学期望为$-\frac{3}{63}=-\frac{1}{21}$. 故选A.

思路4 在U中分别计算横、纵、竖坐标的和.

将原题中X的定义推广到U中(即补充定义$X(P)=1+1+1=3$). 现

在考虑在 U 中随机取一个点，则其横坐标的取值在$\{-2, -1, 1, 2\}$中，且每个值出现的概率均为$\frac{1}{4}$. 因此，这个点的横坐标的数学期望是 0，同理可知这个点的纵坐标和竖坐标的数学期望也都是 0. 这就说明了 U 中的所有点 A 的 $X(A)$ 之和等于 0，故 Ω 中的所有点 A 的 $X(A)$ 之和等于 $-X(P)$，即为-3. 所以 X 的数学期望为$-\frac{3}{63}=-\frac{1}{21}$. 故选 A.

思路 5 转化为向量的数量积.

设 O 为坐标原点，由题意知 $X(A)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$. 对任意 $A\in U$，A 关于 O 的对称点也属于 U. 所以 $\sum\limits_{A\in U}\overrightarrow{OA}=(0, 0, 0)$，因此 $\sum\limits_{A\in U}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=0$. 故 $\sum\limits_{A\in \Omega}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=-|\overrightarrow{OP}|^2=-3$. 所以 X 的数学期望为$-\frac{3}{63}=-\frac{1}{21}$. 因此选 A.

【试题亮点】

试题的一般性结论如下：

设 U 为空间 $\mathbf{R}^n$ 中 $m(m\geqslant 2)$ 个点构成的集合，O 为坐标原点. 已知 $\sum\limits_{A\in U}\overrightarrow{OA}=\mathbf{0}$，点 $P\in U$，记样本空间 $\Omega=\complement_U\{P\}$. 从 Ω 中随机取一个点，定义随机变量 X 如下：对 Ω 中的每个点 A，令 $X(A)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$，则 X 的数学期望 $E(X)=-\frac{|\overrightarrow{OP}|^2}{m-1}$.

试题的内核是向量空间上的古典概型问题，解题思路多样. 试题综合考查了古典概型中随机事件概率的运算法则，随机事件的独立性，最后归结为随机变量的数学期望问题. 随机变量及其分布，特别是离散型随机变量及其数字特征是中学阶段的重要知识，也是学生应熟练掌握的教学内容. 试题也间接考查了空间向量的求和与数量积等知识点. 具体来说，本试题包含如下亮点.

(1)突出基础性要求，助力“双减”政策落地. 试题探讨的离散型随机变量及其分布与数字特征，正是对基础知识和基本技能的深入考查，

契合高考“四翼”考查要求中的基础性要求.

(2)重点考查学生的数学建模、数学运算等核心素养，以及转化与化归思想，有利于引导高中数学教学. 学生首先需要认识到问题的本质是求出 Ω 中的所有点 A 的 $X(A)$ 之和，然后进行计算，使用配对或整体考虑的方法，可以对部分计算过程进行简化. 还可以将问题转化为空间向量求和. 试题有助于培养学生有条理、合乎逻辑的思维品质.

(3)试题作为单选题的最后一题，具有一定的区分度且难度适宜，从作答时间和考试状态方面都有利于学生继续完成后续的试题. 作为概率统计类的问题，试题题干简洁，表述规范，问题的设置既避免了重复与繁杂的计算，也能有效考查学生的数学思维，减轻了学生的运算负担，符合课标的基本理念.

【试题出处】2026 年高考数学全国 I 卷第 9 题

【试题】

设 $z=3+2\mathrm{i}$，则

A. $\overline{z}=3-2\mathrm{i}$　　　B. $|z|=5$

C. $z^2=5+12\mathrm{i}$　　　D. $\dfrac{z+3}{z-\mathrm{i}}\in\mathbf{R}$

【参考答案】　ACD

【考查目标】

试题以简单的复数性质及基本运算为素材，既考查了学生对复数及其共轭、绝对值定义的理解，又考查了对复数四则运算法则的掌握及运用.

【试题分析】

记 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 为虚数单位，当 a 与 b 都是实数时，称 $z=a+b\mathrm{i}$ 为复数，其中 a 称为该复数的实部，b 称为该复数的虚部. 当两个复数实部相等、虚部互为相反数时，称这两个复数互为共轭复数. 复数 z 的共轭复数记为 $\bar{z}$. 因此，由定义知，上述 $z=a+b\mathrm{i}$，有 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}$. 复数的模也称为复数的绝对值，定义为 $|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$，其几何意义为复平面上与复数 z 对应的向量的长度.

一般地，设 $z_1=a+b\mathrm{i}$，$z_2=c+d\mathrm{i}$，其中 a，b，c，$d\in\mathbf{R}$，有

$$z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=ac-bd+(ad+bc)\mathrm{i},$$

当 c，d 不全为零时，还有

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\mathrm{i}.$$

在进行复数除法运算时，可以先通过分子分母同乘分母的共轭复数，从而将分母实数化，再进行化简计算. 特别地，任意复数与其共轭复数的乘积等于该复数的模的平方，即对 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$，有 $z\bar{z}=a^2+b^2=|z|^2$.

本题中，由 $z=3+2\mathrm{i}$ 立刻得到 $a=3$，$b=2$. 因此，$\bar{z}=a-b\mathrm{i}=3-2\mathrm{i}$，故选项 A 正确；$|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{13}$，故选项 B 错误；$z^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}=5+12\mathrm{i}$，故选项 C 正确；$\frac{z+3}{z-\mathrm{i}}=\frac{6+2\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}}=2$，故选项 D 正确.

注意到在选项 D 的判断过程中，可以直接观察到 $6+2\mathrm{i}=2(3+\mathrm{i})$，因此不必进行分母实数化即可求解.

【试题亮点】

试题将复数的概念、基本性质和四则运算作为考查的对象，体现了课标对复数学习的基本要求，即要求学生了解数系的扩充，掌握复数的表示、运算及其几何意义. 试题重点关注基本概念与基本运算，同时避

免烦琐的计算与技巧训练.

试题选项设置合理，分别针对复数共轭、绝对值、复数乘除法等不同内容进行设问，考查内容回归教材，突出了对基础知识的要求. 试题面向全体学生，作为多项选择题的第 1 小题，增加学生的获得感.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 I 卷第 10 题

【试题】

在空间中，A，B 为两个定点，动点 C 到直线 AB 的距离为 2，动点 D 到直线 AB 的距离为 1. 若二面角 $C\text{-}AB\text{-}D$ 为 60°，则

A. $\angle CAD \geqslant 60^\circ$

B. $CD \geqslant \sqrt{3}$

C. 当 $AB \perp CD$ 时，$CD \perp$ 平面 ABD

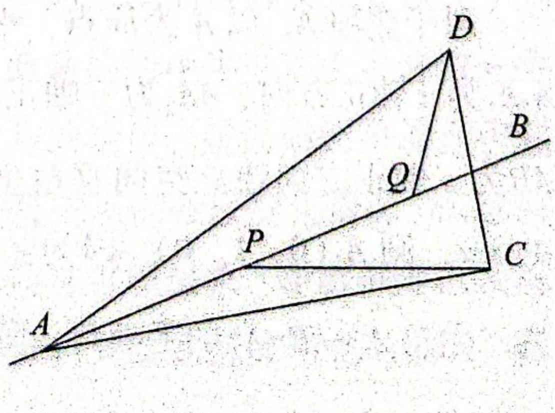
D. 当 $AB \perp$ 平面 ACD 时，$AC \perp AD$

【参考答案】 BC

【考查目标】

本题以二面角为主干图形，综合考查了由动点引起的图形动态变化下有关角度和长度的相应变化情况，以及直线与直线、直线与平面的垂直关系，重点考查学生的空间想象能力和逻辑推理能力.

【试题分析】



思路 1 分别作 $CP \perp AB$ 于点 P，$DQ \perp AB$ 于点 Q，则 $CP = 2$，$DQ = 1$.

对于选项 A. 直观上，当动点 C，D 均沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向（或均沿 $\overrightarrow{BA}$ 方向）移

动到距点 A 充分远时，$\angle CAD$ 应逐渐趋于 0°，故选项 A 错误.

事实上，可构造明确的反例来排除 A. 例如，取 C，D 使得 P 与 Q 重合，且令 $AP=1$，则 $AC=\sqrt{5}$，$AD=\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{3}$，故 $\angle ADC=90°$，因此 $\tan\angle CAD=\dfrac{\sqrt{6}}{2}<\sqrt{3}$，即 $\angle CAD<60°$（在 P 与 Q 重合的情况下，上述所选取的 AP 长度可以换成其他任意正数）.

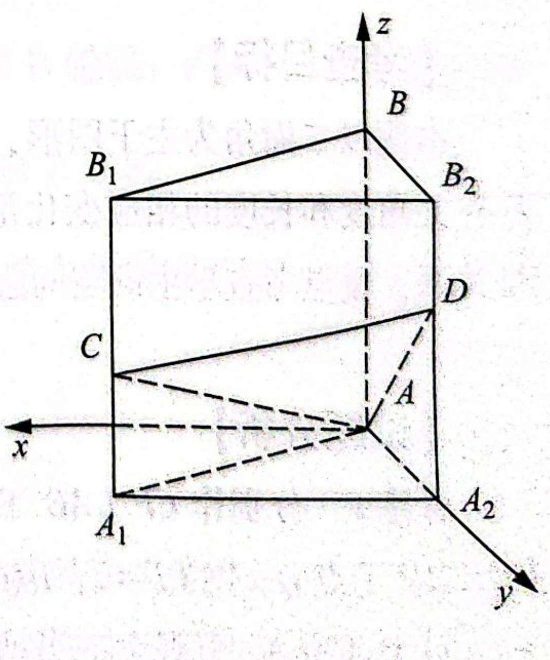
对于选项 B. 设 $CH\perp$ 平面 ABD 于点 H，则 $CH\perp AB$. 又 $CP\perp AB$，故 $AB\perp$ 平面 CPH，有 $HP\perp AB$，从而 $\angle CPH$ 为二面角 $C-AB-D$ 的平面角，$\angle CPH=60°$，所以 C 到平面 ABD 的距离 $CH=CP\sin60°=\sqrt{3}$. 从而 $CD\geqslant CH=\sqrt{3}$.

亦可设 $PQ=t$，定量地计算出 $CD=\sqrt{3+t^2}$，进而判断出 $CD\geqslant\sqrt{3}$. 故选项 B 正确.

对于选项 C. 由 $AB\perp CD$，$CP\perp AB$，可知 $AB\perp$ 平面 CDP，于是 $DP\perp AB$，即 P 与 Q 重合. 此时 $\angle CPD=60°$，结合 $CP=2$，$DQ=1$ 知 $PD\perp CD$，所以 $CD\perp$ 平面 ABD，故选项 C 正确.

对于选项 D. 由 $AB\perp$ 平面 ACD 知，$CA\perp AB$，$DA\perp AB$，即 P，Q，A 三点重合. 此时 $\angle CAD=60°$，不符合 $AC\perp AD$，故选项 D 错误.

思路 2 以 AB 为一条侧棱，构造直三棱柱 $AA_1A_2-BB_1B_2$，使得 $AA_1=2$，$AA_2=1$，二面角 A_1-AB-A_2 为 60°，则可以将 C，D 分别视为直线 A_1B_1，A_2B_2 上的动点.



对于选项 A. 以 A 为原点，平行于 $\overrightarrow{A_2A_1}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{AA_2}$ 为 y 轴正方向，$\overrightarrow{AB}$ 为 z 轴正方向建立空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A_2(0,\ 1,\ 0)$. 因为 $\angle A_1AA_2$ 为二面角 A_1-AB-A_2 的平面角，所以 $\angle A_1AA_2=60°$，故 $A_1A_2=\sqrt{3}$. 考虑到

位置的对称关系，不妨设$A_1(\sqrt{3},1,0)$，进而可设$C(\sqrt{3},1,c)$，$D(0,1,d)$.

因此 $\cos\angle CAD=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}=\dfrac{1+cd}{\sqrt{4+c^2}\sqrt{1+d^2}}$. 当 $c=d=1$ 时，$\cos\angle CAD=\dfrac{2}{\sqrt{10}}>\dfrac{1}{2}$，即$\angle CAD<60°$，故选项A错误.

对于选项B. 由于$CD=\sqrt{3+(c-d)^2}\geqslant\sqrt{3}$，故选项B正确.

对于选项C. 当$AB\perp CD$时，由$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},0,d-c)$及$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$知$d=c$，故$\overrightarrow{CD}=(-\sqrt{3},0,0)$. 又$\overrightarrow{AD}=(0,1,d)$，故$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}=0$，这意味着$\overrightarrow{CD}$与$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$均垂直，所以$CD\perp$平面$ABD$，故选项C正确.

对于选项D. 当$AB\perp$平面ACD时，C，D均在平面xAy内，故$c=0$，$d=0$. 此时$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=1$，不符合$AC\perp AD$，故选项D错误.

【试题亮点】

课标提出，数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，是在数学学习和应用过程中逐步形成和发展的. 直观想象是数学学科核心素养的重要组成部分，指借助几何直观和空间想象感知事物的形态与变化，利用空间形式与数形结合理解和解决数学问题的素养. 在立体几何相关问题中，要求学生能借助空间形式认识事物的位置关系与变化规律，利用图形描述、分析数学问题，建立形与数的联系，构建数学问题的直观模型.

试题综合考查了空间中点、直线、平面之间的位置关系，以一个大小确定的二面角为主干知识载体，在二面角的两个半平面上各选取一个动点，使这两个点到二面角的棱的距离为给定值，进而研究由动点引起的图形动态变化下有关角度、长度、垂直关系的相应变化情况. 试题引导学生在深刻理解课本知识的基础上，通过直观想象、逻辑推理以及适当的代数运算完成题目解答，提高学生分析问题和解决问题的能力. 具

体来说，试题包含如下亮点.

（1）直观想象是发现问题、提出问题、分析问题以及解决问题的重要手段，是探索和形成论证思路、进行数学推理、构建抽象结构的思维基础. 本题中，研究选项 A 时，可以从直观上作出判断（想象 C，D 两点距 A 充分远）. 研究其余选项时，也可以先通过已知条件构建初步的直观模型. 试题引导学生运用空间想象，探索解决问题的思路，发展数形结合的能力，增强运用几何直观和空间想象思考问题的意识. 试题的编制及内容的考查充分反映了课标的理念和精神.

（2）在研究空间几何体的结构特征和空间点、直线、平面的位置关系时，有两类常用的重要方法：综合几何方法与空间向量方法. 解答本题时，学生可以选择自己擅长的方法. 比如，举反例是判断一个命题是假命题的重要方法. 试题给学生分析问题和解决问题提供了多种思路和方法，给不同思维方式（建系思维与几何思维）的学生都提供了发挥的空间.

（3）试题兼顾基础性与综合性，在全面考查学生立体几何基础知识的同时，着重考查了动态变化的角度、长度以及垂直关系. 在解决由多个动点引起的图形变化问题的过程中，引导学生克服不确定性带来的畏惧感，树立敢于尝试的科学精神，开拓创新意识. 试题难度适中，有效考查了直观想象能力、逻辑推理能力、数学运算能力，具有较好的区分度和选拔功能.

【试题出处】2026 年高考数学全国 Ⅰ 卷第 11 题

【试题】

已知圆 C_1：$(x+1)^2+y^2=1$，圆 C_2：$(x-1)^2+y^2=1$，圆 C_3：$x^2+(y-\sqrt{3})^2=1$. 直线 l：$y=kx+b$ 与 C_1，C_2，C_3 均有两个交点. 记 l 被 C_1，C_2，C_3 截得的弦长分别为 s_1，s_2，s_3. 则

A. k 可以取任意实数

B. 满足 $s_1=s_2=s_3$ 的直线 l 共有 3 条

C. 满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线 l 多于 3 条

D. 当 $b=0$ 时，$s_1+s_2+s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$

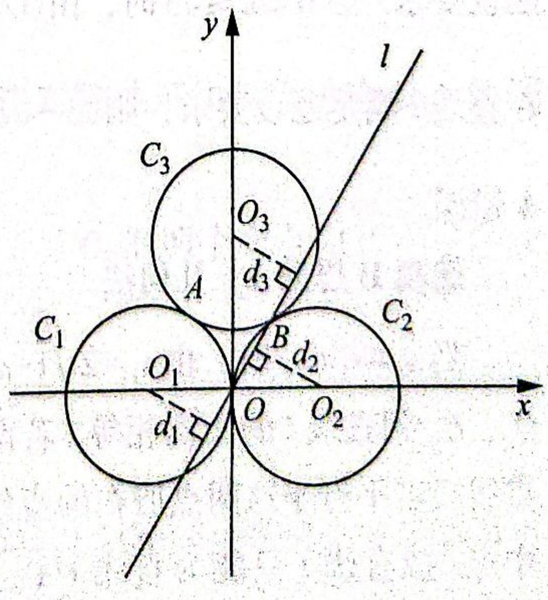
【参考答案】 BCD

【考查目标】

试题主要考查点到直线的距离、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系、不等式、函数的单调性和最值、导数及其应用等基础知识，考查数形结合、分类讨论、函数与方程、转化与化归等数学思想，考查学生的直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养以及综合、灵活运用所学知识分析问题与解决问题的能力.

【试题分析】

由题设知，圆 C_1，C_2，C_3 的半径均为 1，圆心分别为 $O_1(-1, 0)$，$O_2(1, 0)$，$O_3(0, \sqrt{3})$，且两两相外切，C_1 与 C_2 相切于坐标原点 $O(0, 0)$，C_1 与 C_3 相切于点 $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C_2$ 与 C_3 相切于点 $B\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



设 O_1，O_2，O_3 到直线 l：$y=kx+b$ 的距离分别为 d_1，d_2，d_3，则

$d_1=\frac{|b-k|}{\sqrt{k^2+1}}$，$d_2=\frac{|b+k|}{\sqrt{k^2+1}}$，$d_3=\frac{|b-\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+1}}$，

$s_i=2\sqrt{1-d_i^2}\,(i=1, 2, 3)$.

A 选项思路 1 从形的角度思考.

经过 C_1 与 C_2 的切点 O 和 C_3 的圆心 O_3 的直线为 y 轴，显然，平行

于 y 轴的直线不可能与圆 C_1，C_2，C_3 均有两个交点，从而由图形的对称性知，平行于 O_1B 的直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+t(t\in R)$ 不可能与圆 C_1，C_2，C_3 均有两个交点，平行于 O_2A 的直线 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+s(s\in R)$ 也不可能与圆 C_1，C_2，C_3 均有两个交点．故选项 A 错误．

选项 A 思路 2 从数的角度思考．

由 d_1，d_2，d_3 的计算公式可知，当直线 l：$y=kx+b$ 满足题设要求时，直线 $y=-kx+b$ 也满足题设要求，故在选项 A 中仅需讨论 $k\geqslant 0$ 的情形．

由直线 l：$y=kx+b$ 与 C_1，C_2，C_3 均有两个交点可知 $d_i\in[0,1)(i=1,2,3)$．于是

$$\frac{|b-k|}{\sqrt{k^2+1}}<1,\quad \frac{|b+k|}{\sqrt{k^2+1}}<1,\quad \frac{|b-\sqrt{3}|}{\sqrt{k^2+1}}<1,$$

即

$$k-\sqrt{k^2+1}<b<k+\sqrt{k^2+1},\qquad ①$$

$$-k-\sqrt{k^2+1}<b<-k+\sqrt{k^2+1},\qquad ②$$

$$\sqrt{3}-\sqrt{k^2+1}<b<\sqrt{3}+\sqrt{k^2+1}.\qquad ③$$

当 $k>\sqrt{3}$ 时，由①②③知，当 $k-\sqrt{k^2+1}<b<-k+\sqrt{k^2+1}$ 时，直线 l 满足题设要求．当 $0\leqslant k\leqslant\sqrt{3}$ 时，由①②③知 $\sqrt{3}-\sqrt{k^2+1}<b<-k+\sqrt{k^2+1}$，若存在直线 l 满足题设要求，则 $\sqrt{3}-\sqrt{k^2+1}<-k+\sqrt{k^2+1}$，解得 $k\neq\frac{\sqrt{3}}{3}$．故选项 A 错误．

选项 B 思路 1 几何法．

当 $s_1=s_2=s_3$ 时，由 $s_i=2\sqrt{1-d_i^2}(i=1,2,3)$ 知 $d_1=d_2=d_3$，所以 O_1，O_2，O_3 到直线 l 的距离相等，若两个定点到一条直线的距离相等，则该直线或者平行于这两点所在的直线，或者经过以这两点为端点的线段的中点．故直线 l 只能为直线 OA、直线 OB、直线 AB 中的一条，从而满

足 $s_1=s_2=s_3$ 的直线 l 共有 3 条. 故选项 B 正确.

选项 B 思路 2 代数法.

当 $s_1=s_2=s_3$ 时，由 $s_i=2\sqrt{1-d_i^2}\,(i=1,\ 2,\ 3)$ 知 $d_1=d_2=d_3$. 故 $|b-k|=|b+k|=|b-\sqrt{3}|$，解得 $k=0$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，或 $k=\pm\sqrt{3}$，$b=0$，从而满足 $s_1=s_2=s_3$ 的直线 l 共有 3 条. 故选项 B 正确.

选项 C

$s_1+s_2+s_3=2\left(\sqrt{1-\dfrac{(b-k)^2}{k^2+1}}+\sqrt{1-\dfrac{(b+k)^2}{k^2+1}}+\sqrt{1-\dfrac{(b-\sqrt{3})^2}{k^2+1}}\right)$，故由 $s_1+s_2+s_3=3$ 得

$$\sqrt{1-\frac{(b-k)^2}{k^2+1}}+\sqrt{1-\frac{(b+k)^2}{k^2+1}}+\sqrt{1-\frac{(b-\sqrt{3})^2}{k^2+1}}=\frac{3}{2}. \qquad ④$$

由题设知，若直线 l 满足要求，则 l 关于 y 轴，直线 O_1B 和直线 O_2A 对称的直线也满足要求. 故发现一条直线满足要求即可找到满足要求的 3 条直线. ④中有两个参数，显然不容易解方程，故优先考虑特殊情形，如 $s_1=s_2=s_3=1$，$k=0$，或 $b=0$ 等. 由选项 B 思路 2 可知，当 $k=0$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，或 $k=\pm\sqrt{3}$，$b=0$ 时，$s_1=s_2=s_3=1$，从而这 3 条直线满足 $s_1+s_2+s_3=3$. 故选项 C 是否正确取决于能否找到另一条直线满足 $s_1+s_2+s_3=3$.

思路 1 取 $b=0$，研究 $s_1+s_2+s_3$.

当 $b=0$ 时，$s_1+s_2+s_3=\dfrac{4+2\sqrt{k^2-2}}{\sqrt{k^2+1}}$. 由对称性可知仅需讨论 $k>0$ 的情形. 此时 l 与 C_1，C_2 均有两个交点，由 l 与 C_3 有两个交点知 $d_3=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}}<1$，解得 $k>\sqrt{2}$.

方法 1 解方程.

由 $\dfrac{4+2\sqrt{k^2-2}}{\sqrt{k^2+1}}=3$，化简得 $25k^4-246k^2+513=0$. 解得 $k=\sqrt{3}$ 或 $k=$

$\frac{3\sqrt{19}}{5}$. 容易验证 $k=\frac{3\sqrt{19}}{5}$时也有 $s_1+s_2+s_3=3$. 故选项 C 正确.

方法 2 找函数零点.

设 $t=\sqrt{k^2-2}$，则 $s_1+s_2+s_3=\frac{4+2t}{\sqrt{t^2+3}}(t>0)$，$(s_1+s_2+s_3)^2=4+\frac{16t+4}{t^2+3}$. 设函数 $f(x)=\frac{4x+1}{x^2+3}(x\geqslant 0)$，则 $f'(x)=\frac{4(x^2+3)-2x(4x+1)}{(x^2+3)^2}=\frac{-2(x+2)(2x-3)}{(x^2+3)^2}$.

所以当 $x\in\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$时，$f(x)$单调递增；当 $x\in\left(\frac{3}{2},\ +\infty\right)$时，$f(x)$单调递减. 故当 $x=\frac{3}{2}$时，$f(x)$取得最大值$\frac{4}{3}$. 所以当 $k=\frac{\sqrt{17}}{2}$时，$s_1+s_2+s_3$ 取得最大值为$\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

因为 $f(0)=\frac{1}{3}$，$\sqrt{4+4f(0)}=\sqrt{4+\frac{4}{3}}<3$；$f(5)=\frac{3}{4}$，$\sqrt{4+4f(5)}=\sqrt{4+3}<3$；以及$\frac{2\sqrt{21}}{3}>3$，所以存在 $k_1\in\left(\sqrt{2},\ \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$和 $k_2\in\left(\frac{\sqrt{17}}{2},\ 3\sqrt{3}\right)$，使得以它们为斜率的两条直线均满足 $s_1+s_2+s_3=3$. 再由对称性知满足要求的直线 l 至少有 6 条，多于 3 条. 故选项 C 正确.

思路 2 取 $k=0$，研究 $s_1+s_2+s_3$.

观察④的左边发现，若 $k=a$ 满足方程，则 $k=-a$ 也满足方程，故尝试讨论 $k\geqslant 0$ 时能否找到另一条直线满足 $s_1+s_2+s_3=3$.

当 $k=0$ 时，④为 $2\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-(b-\sqrt{3})^2}=\frac{3}{2}$. 显然 $b=\frac{\sqrt{3}}{2}$满足方程，所以可以通过移项将解方程转化为判断三次方程的根的取值范围，或从函数角度转化为零点存在性问题.

方法 1 判断三次方程的根的取值范围.

令 $t=b-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $b\in[\sqrt{3}-1,\ 1]$，所以 $t\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2}-1,\ 1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. 将方程

$2\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-(b-\sqrt{3})^2}=\frac{3}{2}$变形为$t(3t^3+10\sqrt{3}t^2+31t+2\sqrt{3})=0$.

设函数$f(x)=3x^3+10\sqrt{3}x^2+31x+2\sqrt{3}$，则$f'(x)=9x^2+20\sqrt{3}x+31$.

当$x\in(-1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，所以函数$f(x)$在$(-1,+\infty)$单调递增. 又$f(0)>0$，$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)<f\left(\frac{7}{8}-1\right)=\frac{69\sqrt{3}-124}{32}-\frac{3}{512}<\frac{69\sqrt{3}-124}{32}<\frac{69\times7-124\times4}{128}<0$，故函数$f(x)$在区间$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1,0\right)$上有唯一零点，记为$t_0$.

容易验证$b=t_0+\frac{\sqrt{3}}{2}$是方程$2\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-(b-\sqrt{3})^2}=\frac{3}{2}$的根，故选项C正确.

方法2　从函数角度研究零点存在性.

设函数$f(x)=2\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-(x-\sqrt{3})^2}-\frac{3}{2}(x\in[\sqrt{3}-1,1])$，由上述讨论知$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$. 又$f(\sqrt{3}-1)=2\sqrt{1-(\sqrt{3}-1)^2}-\frac{3}{2}=2\sqrt{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}-\frac{3}{2}<2\sqrt{\frac{3}{10}\cdot\frac{18}{10}}-\frac{3}{2}=\frac{3(2\sqrt{6}-5)}{10}<0$，$f\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{6}{5}+\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}-\sqrt{3}\right)^2}-\frac{3}{2}>\sqrt{1-\left(\frac{7}{4}-\frac{4}{5}\right)^2}-\frac{3}{10}=\frac{\sqrt{39}-6}{20}>0$，故存在$x_0\in\left(\sqrt{3}-1,\frac{4}{5}\right)$，使得$f(x_0)=0$. 故选项C正确.

选项D思路1　通过求导计算$s_1+s_2+s_3$的最大值.

见选项C思路1的方法2. 故选项D正确.

选项D思路2　利用基本不等式求$s_1+s_2+s_3$的最大值.

当$b=0$时，由对称性可知仅需讨论$k>0$的情形. 此时l与C_1、C_2均有两个交点，由l与C_3有两个交点知$d_3=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{k^2+1}}<1$，解得$k>\sqrt{2}$.

对于$s_1+s_2+s_3=\frac{4+2\sqrt{k^2-2}}{\sqrt{k^2+1}}$. 设$t=\sqrt{k^2-2}$，则$s_1+s_2+s_3=\frac{4+2t}{\sqrt{t^2+3}}(t>0)$，

$(s_1+s_2+s_3)^2=4+4\times\frac{4t+1}{t^2+3}$. 令 $4t+1=s$，则 $(s_1+s_2+s_3)^2=4+4\times\frac{s}{\left(\frac{s-1}{4}\right)^2+3}=4+$

$4\times\frac{1}{\frac{s}{16}-\frac{1}{8}+\frac{49}{16s}}\leqslant\frac{28}{3}$，当且仅当 $\frac{s}{16}=\frac{49}{16s}$ 即 $t=\frac{3}{2}$ 时等号成立. 所以当 $k=\frac{\sqrt{17}}{2}$

时，$s_1+s_2+s_3$ 取得最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$. 故选项 D 正确.

【试题亮点】

直线与圆的位置关系是学生非常熟悉的内容，试题在此基础上拓展，以一条直线与三个两两相外切的已知圆均相交为前提，讨论直线斜率以及三个弦长之和的取值，有利于学生稳定心态，敢于挑战压轴多选题.

试题对点到直线的距离、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系、不等式、函数的单调性和最值、导数及其应用等基础知识进行综合考查，要求学生对图形的对称性有深入的认识，能把求弦长转化为圆心到直线的距离，从而将弦长之和转化为以斜率和截距为参数的函数模型，再利用从特殊到一般的思想结合导数去讨论弦长之和. 试题着重考查了数形结合、分类讨论、函数与方程、转化与化归等数学思想，考查学生的逻辑思维能力和数学运算能力，以及综合运用所学知识分析新问题、解决新问题的创新能力.

试题的设计在体现基础性的同时，对能力的考查要求较高，从而保证了试题具有良好的区分度. 选项 A 需要学生对本题的构图有整体认识，发现图形的三条对称轴，便可从平行于 y 轴的直线不可能与圆 C_1，C_2，C_3 均有两个交点迅速打开突破口. 选项 B 是四个选项中最容易判别的，从几何角度和代数角度都能得到结论. 选项 D 需要进行适当的计算，通过基本不等式或导数来进行判别. 选项 C 虽然是难度最大的，但也是入口最多的. 如果直接从计算公式入手，有两个参数，不容易深入，但选

项B中已经暗示 $s_1=s_2=s_3=1$ 的情形满足要求，从而只需再找一条直线即可. 显然 $b=0$ 或 $k=0$ 这两种特殊情形相对简单，应优先考虑. 当 $b=0$ 时，可以通过解方程直接计算出两个斜率满足要求，从而由对称性知满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线 l 至少有 6 条. 若学生尝试 $k=0$ 的特殊情形，无论转化为解方程，还是转化为函数的零点存在性问题，虽可解决问题，但所需时间较多. 如果学生能先考虑选项 D 就会受到启发，通过导数先计算出当 $b=0$ 时，$s_1+s_2+s_3$ 的最大值为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$，注意到 $\frac{2\sqrt{21}}{3}>3$ 以及切线位置的弦长之和小于 3，于是由函数图像连续性可知当 $b=0$ 时，至少有两条直线满足要求，从而由对称性可得至少有 6 条直线满足要求，顺利解决问题. 这种先 D 后 C 的做法显然是计算量最小的，但是思维量非常大. 每个选项均有不同解法，给学生提供充分发挥的空间. 每一种解法的思维量都较大，但能通过合理的思维避免复杂计算，且解题需用到的知识全都是高中数学课程的主干知识，这也充分体现了高考的公平性和选拔性. 试题鼓励广大中学教师踏踏实实把课本知识传授到位的同时，要加强数学思维严谨性和灵活性的训练. 这样的设计既保证了所有学生的获得感，也能让思维能力强的学生有展示的机会.

作为选择题，试题仅对提出的问题进行了部分研究，很多相关的问题都未能展示，这给广大教师和学生留下了很大的思考空间. 比如，参数 k 和 b 的取值范围是什么？$s_1+s_2+s_3$ 的最大值及取值范围是什么？满足 $s_1+s_2+s_3=3$ 的直线 l 是否有无穷多条？这些问题大多是基于中学知识可以解决的，也是适合教师和学生进一步去探究和发现的好问题.

本题作为多选题的最后一题，立意新颖，背景公平，题干简洁，解法多样，选项层层递进，难度设置合理，区分度好，体现了“多想少算”的考查理念，有利于中学数学教学，也有利于高校选拔人才.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅰ卷第12题

【试题】

双曲线 $5x^2-6y^2=1$ 的离心率为________.

【参考答案】 $\dfrac{\sqrt{66}}{6}$

【考查目标】

试题主要考查双曲线的实轴长、虚轴长、焦距及离心率等基本概念，考查学生对圆锥曲线简单几何性质的掌握程度和基本的逻辑推理能力.

【试题分析】

设双曲线 $5x^2-6y^2=1$ 的实轴长为 $2a$，虚轴长为 $2b$，焦距为 $2c$，离心率为 e.

思路1 利用基本定义.

由题意得 $a^2=\dfrac{1}{5}$，$b^2=\dfrac{1}{6}$，因此 $c^2=a^2+b^2=\dfrac{11}{30}$，离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{\frac{11}{30}}}{\sqrt{\frac{1}{5}}}=\dfrac{\sqrt{66}}{6}$.

思路2 双曲线 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 与 C_2：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=k(k>0)$ 的离心率一致.

双曲线 C_2 的半实轴长为 $a\sqrt{k}$，半虚轴长为 $b\sqrt{k}$，半焦距为 $\sqrt{a^2k+b^2k}=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{k}$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{k}}{a\sqrt{k}}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，与双曲线 C_1 的离心

率相等.

所以，所求双曲线 $5x^2-6y^2=1$ 的离心率 e 等于 $5x^2-6y^2=30$ 的离心率$\frac{\sqrt{66}}{6}$.

【试题亮点】

试题虽然简单，但立意深刻. 试题旨在引导学生回归教材，回归对数学基本概念的理解和掌握. 试题入口多样，不同解法均可作答，有利于引导高中数学教学.

试题给出双曲线的方程，考查双曲线的基本量——离心率. 考查内容是基本的且为学生所熟知的. 学生可以利用思路 1，结合基本定义按部就班计算出正确答案，也可以利用思路 2，通过对圆锥曲线基本量的深刻理解，不需要繁杂计算即可得到正确答案.

试题以学生所熟悉的知识呈现，面向全体学生，计算量小，解法多样，容易入手并得分，有利于激发学生的自信心，缓解学生的紧张情绪.

【试题出处】 2026 年高考数学全国 I 卷第 13 题

【试题】

已知 $f(x)=2\sin(ax+\theta)$ ($a\in\mathbf{Z}$，$0\leqslant\theta<2\pi$) 是偶函数，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增，则 $\theta=$________，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=$________.

【参考答案】 $\frac{3\pi}{2}$，1

【考查目标】

试题以学生熟悉的函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$为载体，考查了三角函数的单调性、奇偶性、周期性、诱导公式、图像平移等基础知识，考查学生的化归与转化思想以及逻辑推理、数学运算等核心素养.

【试题分析】

由$f(x)$在区间$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增知$a\neq 0$. 以下可以由条件先确定$\theta$的值，再来确定$a$的范围，最后求出$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$；也可以先估计$a$的范围，并对每个固定的$a$，推出$\theta$的值，最后求出$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

思路1　先确定θ的值，再确定a的范围，最后求出$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

由$f(x)$是偶函数且在区间$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增可知，$x=0$是$f(x)$的极小值点，故$f(0)=-2$，即$2\sin\theta=-2$，结合$0\leqslant\theta<2\pi$得$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$.

所以$f(x)=-2\cos ax$. 注意$f(x)$的一个周期长为$\dfrac{2\pi}{|a|}$，故$f(x)$的一个单调区间长不超过$\dfrac{\pi}{|a|}$. 由$f(x)$在区间$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$单调递增知$\dfrac{\pi}{|a|}\geqslant\dfrac{\pi}{2}$，故$a\in\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$. 因为$\cos(-ax)=\cos ax$，故不妨设$a=1$或$a=2$.

当$a=1$时，$f(x)=-2\cos x$，故$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-2\cos\dfrac{2\pi}{3}=1$；

当$a=2$时，$f(x)=-2\cos 2x$，故$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-2\cos\dfrac{4\pi}{3}=1$.

因此第一空填$\dfrac{3\pi}{2}$，第二空填1.

思路2　先估计a的范围，再确定θ的值，最后求出$f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

注意$f(x)$的一个周期长为$\frac{2\pi}{|a|}$，故$f(x)$的一个单调区间长不超过$\frac{\pi}{|a|}$. 由$f(x)$在区间$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$单调递增知$\frac{\pi}{|a|} \geqslant \frac{\pi}{2}$，故$a \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

当$a=\pm 2$时，$f(x)$的一个单调区间长度的最大值为$\frac{\pi}{2}$，由$f(x)$在区间$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$单调递增知$f(0)=-2$. 当$a=\pm 1$时，$f(x)$的一个单调区间长度的最大值为$\pi$，由$f(x)$在区间$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$单调递增知$f(0) \leqslant 0$，再由$f(x)$是偶函数知$f(0)=-2$. 以下同思路1.

【试题亮点】

三角函数不但是中学数学的主干内容和必备知识，也是大学数学、物理等课程的重要基础. 形如$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$的函数是三角函数中的基础和核心内容. 试题以学生熟悉的内容为载体，将三角函数的单调性、奇偶性、周期性等性质有机地结合起来，同时考查了学生的多种数学核心素养. 学生既可以按部就班地先求出θ，再求出a的范围，最后求出$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$的值，也可以先给出$a$的范围，然后求解.

试题的设问颇为巧妙，θ是完全可以确定的，虽然a有4种可能的值，但是不论a取哪一个值，$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$的值均为1. 学生可以使用多种方法求解，这也体现了试题对学生的人文关怀. 试题作为填空题的第2小题，计算量很小，体现了试题“多想少算”的考查理念.

试题题干简洁，设问明确，解题思路清晰，突出通性通法的同时也鼓励特殊做法，注重对基础知识和基本素养的考查. 试题源于教材，能科学合理地引导中学教学，促进教考衔接，引导学生加强对教材内容和课堂教学的融会贯通并灵活运用，提高学习效率，避免机械刷题、无效

学习，落实“四翼”考查要求，助力“双减”政策落地.

【试题出处】2026 年高考数学全国 I 卷第 14 题

【试题】

设实数 q 满足：存在数列 $\{a_n\}$，使得对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_1+a_2+\cdots+a_{3n}=n^2+n$，且 $\{a_n\}$ 中有某连续 9 项 a_k，a_{k+1}，…，a_{k+8} 是公比为 q 的等比数列，则 q 的最大值为__________.

【参考答案】 $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{2}$

【考查目标】

试题考查数列通项与前 n 项和的关系以及等比数列的概念与性质，通过新颖的设问，考查学生对基本公式的理解和对常用方法的变通，考查学生的逻辑推理能力与创新能力.

【试题分析】

思路 1 将数列 $\{a_n\}$ 中构成等比数列的连续 9 项 a_k，a_{k+1}，…，a_{k+8} 依次设为 a，aq，…，aq^8.

由于条件“对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_1+a_2+\cdots+a_{3n}=n^2+n$”等价于“对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=2n$”，则根据该限制条件的结构特点，可按 k 除以 3 的余数进行分类讨论. 令 $m\in\mathbf{N}^*$.

当 $k=3m-2$ 时，

$$a(1+q+q^2)=a_{3m-2}+a_{3m-1}+a_{3m}=2m,$$

$$aq^3(1+q+q^2)=a_{3m+1}+a_{3m+2}+a_{3m+3}=2(m+1),$$

$$aq^6(1+q+q^2)=a_{3m+4}+a_{3m+5}+a_{3m+6}=2(m+2),$$

故 $q^3=\frac{m+1}{m}=\frac{m+2}{m+1}$，矛盾.

当 $k=3m-1$ 时，

$$aq^2(1+q+q^2)=a_{3m+1}+a_{3m+2}+a_{3m+3}=2(m+1),$$
$$aq^5(1+q+q^2)=a_{3m+4}+a_{3m+5}+a_{3m+6}=2(m+2),$$

故 $q^3=\frac{m+2}{m+1}\leqslant\frac{3}{2}$，即 $q\leqslant\sqrt[3]{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$.

当 $k=3m$ 时，

$$aq(1+q+q^2)=a_{3m+1}+a_{3m+2}+a_{3m+3}=2(m+1),$$
$$aq^4(1+q+q^2)=a_{3m+4}+a_{3m+5}+a_{3m+6}=2(m+2),$$

同理得 $q\leqslant\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$.

为说明 $q=\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ 为最大值，需对上述 $k=3m-1$ 与 $k=3m$ 中至少一种情形说明等号可以成立. 以前者为例，等号成立时 $m=1$，$k=2$，故 $a_4+a_5+a_6=4$，解出 $a_4=\frac{4}{1+q+q^2}$，故 a_2，a_3，…，a_{10} 依次为 $\frac{4q^{-2}}{1+q+q^2}$，$\frac{4q^{-1}}{1+q+q^2}$，…，$\frac{4q^6}{1+q+q^2}$，此时 $a_7+a_8+a_9=6$. 最后易取 a_1 和 a_{11}，a_{12}，…，使得对 $n=1$ 及任意 $n\geqslant4$，均有 $a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=2n$. 因此 q 的最大值为 $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$.

思路 2 注意到数列 $\{a_n\}$ 的连续 9 项中必有连续 6 项形如 a_{3m+1}，a_{3m+2}，…，$a_{3m+6}(m\in\mathbf{N}^*)$，故思路 1 中的三类情形可统一分析，从而简化 $q\leqslant\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ 的证明.

同思路 1，得到“对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=2n$”.

当某连续 9 项 a_k，a_{k+1}，…，a_{k+8} 是公比为 q 的等比数列时，由于 k，$k+1$，$k+2$ 中必有某个数为 3 的倍数，将其记为 $3m(m\in\mathbf{N}^*)$，

则 $3m+6\leqslant k+8$，故 a_{3m+1}，a_{3m+2}，$\cdots$，a_{3m+6}是公比为 q 的等比数列，从而 $q^3=\dfrac{a_{3m+4}+a_{3m+5}+a_{3m+6}}{a_{3m+1}+a_{3m+2}+a_{3m+3}}=\dfrac{2(m+2)}{2(m+1)}\leqslant\dfrac{3}{2}$，即 $q\leqslant\dfrac{\sqrt[3]{12}}{2}$. 对于 $q=\dfrac{\sqrt[3]{12}}{2}$，数列 $\{a_n\}$ 存在性的验证同思路 1.

【试题亮点】

试题作为客观题的最后一题，在体现基础性与综合性考查要求的同时，强调了对创新性的考查.

首先，试题兼顾基础知识和常用方法的掌握层面与迁移层面. 在掌握层面，所考查的数列通项与前 n 项和的关系以及等比数列的概念与性质，均为课本中数列的基本内容，体现出基础性考查要求. 在迁移层面，大部分学生熟知数列通项 $\{a_n\}$ 和其前 n 项和数列 $\{S_n\}$ 可以相互确定，而在本题中，则要求学生迁移此方法，将题目所给的前 $3n$ 项和的信息等价转化为形如 a_{3n-2}，a_{3n-1}，a_{3n} 的相邻三项之和的信息. 大部分学生熟悉并会在平时解题中运用“公比为 q 的等比数列中，S_3，S_6-S_3，S_9-S_6，$\cdots$ 也构成等比数列，且公比为 q^3”之类的性质. 而在本题中，则要求学生理解推导此类性质的方法原理，识别出适当的运用场合，对形如 a_{3m+1}，a_{3m+2}，$\cdots$，a_{3m+6} 的连续 6 项推导出所需的信息. 总体而言，本题引导学生掌握扎实的基础知识，并能根据实际情况迁移变通，而非生搬硬套地运用方法.

其次，试题通过精心设置条件与任务，兼顾问题情境的复杂性和计算的简约性，强调思维层面的考查，体现“多想少算”的考查理念. 所设置的条件“$a_1+a_2+\cdots+a_{3n}=n^2+n$”，既使数列的发展具有较开放的特点，又使后续的计算与判断较为简明，不过度增加学生的计算负担. 在上述约束下，设置“有某连续 9 项成等比数列”的条件，并以求其公比 q 的最大值为任务要求. 从数学本质而言，这对于反映此类数列的结构与发展规律而言是恰如其分的. 事实上，若将“9 项”改为 7 项（或更少项），则公比 q 可以取到任意非零实数（对任意正整数 m，形如 a_{3m-1}，

a_{3m}，…，a_{3m+5}的连续7项均可实现该公比）. 若改为8项，则q可以取到更大的值$\sqrt[3]{2}$，然而此时的连续8项恰为$\{a_n\}$的前8项，相对更容易处于解题者的视线之中，使问题情境的复杂性有所降低. 若改为10项，题目本质无变化，基本可以平行替代本题. 若改为11项（或更多项），则由于此时连续11项不可能成等比数列，提问变得无意义. 相比之下，本题对条件的设置拿捏得恰到好处，以提问q的最大值为窗口，能较充分地考查学生对此类数列的结构与发展规律的理解程度. 此外，在分析与解决问题的过程中，如果学生能如上述思路2那样洞察到连续9项中必有连续6项形如a_{3m+1}，a_{3m+2}，…，a_{3m+6}，再由$\dfrac{a_{3m+4}+a_{3m+5}+a_{3m+6}}{a_{3m+1}+a_{3m+2}+a_{3m+3}}$这一整体结构直接反映$q$，就能轻巧地完成$q$的上界估计. 分析取等情形时，若能理解限制条件的特点，意识到其余的项均可按适当次序合理选取，则可在不进行具体构造的情况下确信q的上界可以取到，从而确定q的最大值. 因此，本题要求学生洞察问题本质，抓住关键信息，能够“数学地思考”.

最后，试题创设了新颖的数学情境，考查学生在陌生情境中主动思考，进行新颖的推测和设想并周密论证的能力. 学生在等差数列、等比数列等常见模型中无法找到、也难以联想到符合本题条件的数列，故需要摆脱思维定式的束缚，勇于大胆创新，找到新规律，得出新结论，在头脑中创造性地构建出满足限制条件的陌生对象. 这是对高考创新性考查要求的直接响应，有利于发挥高考“服务选才”的核心功能.

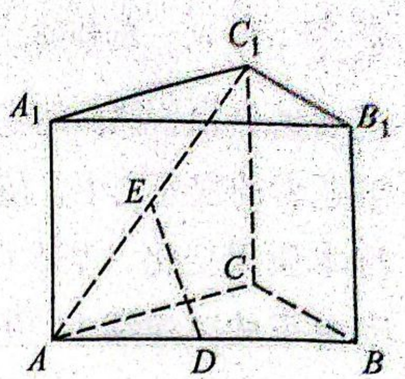
【试题出处】2026年高考数学全国Ⅰ卷第15题

【试题】

如图，在直三棱柱$ABC\text{-}A_1B_1C_1$中，$\angle ACB=90°$，$AC=BC$，D，E分别为AB，AC_1的中点.

(1) 证明：$DE /\!/$ 平面 BCC_1B_1；

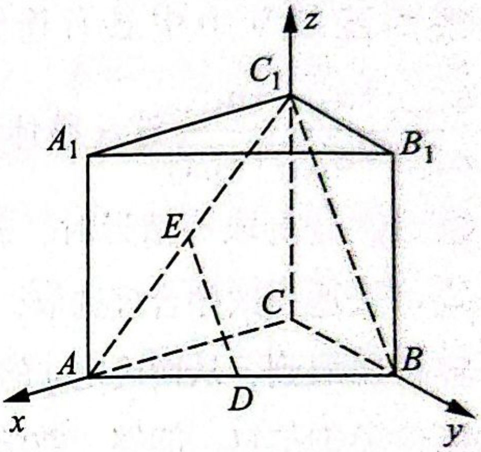
(2) 设 $CC_1=2$，直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角为 45°，求直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离.



【参考答案】

(1) 连结 BC_1，由已知得 $DE /\!/ BC_1$. 又因为 $DE \not\subset$ 平面 BCC_1B_1，所以 $DE /\!/$ 平面 BCC_1B_1.

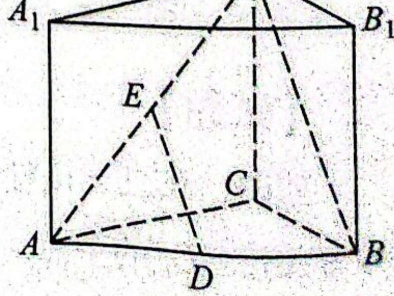
(2) **解法 1** 由题设得 $CC_1 \perp$ 平面 ABC，$AC \perp BC$. 以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$. 设 $AC=2s\,(s>0)$，则 $A(2s, 0, 0)$，$B(0, 2s, 0)$，$C_1(0, 0, 2)$，因此 $D(s, s, 0)$，$E(s, 0, 1)$，从而 $\overrightarrow{ED}=(0, s, -1)$.



因为平面 ACC_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0, 1, 0)$，所以 $\cos\langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{ED}\rangle = \dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{ED}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{ED}|}=\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}$. 由已知得 $\dfrac{s}{\sqrt{s^2+1}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $s=1$.

因为平面 BCC_1B_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1, 0, 0)$，$\overrightarrow{C_1E}=(1, 0, -1)$，所以 E 到平面 BCC_1B_1 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{C_1E}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=1$. 因此直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.

解法 2 因为 $DE /\!/ BC_1$，所以直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角等于直线 DE 与平面 ACC_1A_1 所成的角.



在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1 \perp$ 平面 ABC，故 $CC_1 \perp BC$，$CC_1 \perp AC$. 又因为 $BC \perp AC$，

所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，$AC\perp$ 平面 BCC_1B_1. 因此 $\angle BC_1C$ 是直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角，故 $\angle BC_1C=45°$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle BCC_1$ 中，$BC=CC_1=2$，因此 $AC=BC=2$. 故 A 到平面 BCC_1B_1 的距离为 $AC=2$.

因为 E 为 AC_1 的中点，所以 E 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1，从而直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.

【考查目标】

试题载体是学生熟悉的三棱柱（沿对角面分割的半个正方体），着重考查与空间中线线、线面位置关系有关的基础知识和基本方法，以及空间中角和距离的计算，考查学生的直观想象能力、逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

(1)证明空间中的直线与平面平行的关键，是要证明该直线与平面内的一条直线平行. 过程同参考答案.

(2)此问可采用向量法求解. 建立空间直角坐标系，设 AC 的长度为 $2s$，用 s 表达出 D，E 的坐标，依据题目条件，列出关于 s 的方程，解得 s 的值，进而求得直线 DE 到平面 BCC_1B_1 的距离.

此问也可采用综合几何方法求解. 首先证明 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，从而得到 $\angle BC_1C$ 就是直线 BC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角，然后通过解三角形可得 BC 的长度. 再证明 $AC\perp$ 平面 BCC_1B_1，得到 A 到平面 BCC_1B_1 的距离为 AC（长度与 BC 相等），然后利用 A 到平面 BCC_1B_1 的距离是 E 到平面 BCC_1B_1 的距离的 2 倍，得到结果.

【试题亮点】

试题关注学生学习实际，在直观想象能力、逻辑推理能力、数学运算能力等方面对学生作了基础性考查，对引导中学数学教学起到了积极的导向作用.

试题给出的三棱柱是从学生常见的正方体中分割出来的. 以常见立体图形的常见几何量为题干，摒弃偏、难、怪题，所涉及的空间概念和线线、线面关系等，为广大学生所熟知. 同时为学生分析问题和解决问题提供了多种思路和方法，给不同思维方式（向量方法与综合几何方法）的学生都提供了发挥的空间.

试题通过问题的分层设计，使学生可以充分发挥. 试题准确把握相关几何要素，把线线和线面关系证明、线面角计算、线面距离计算等较好地融入到试题当中，使直观想象能力、逻辑推理能力以及数学运算能力都得到了有效考查.

【试题出处】 2026年高考数学全国Ⅰ卷第16题

【试题】

已知在$\triangle ABC$中，$AB=3$，$BC=2\sqrt{3}$，$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(1)求$\cos A$；

(2)设D，E两点满足：D在BA的延长线上，$DE/\!/BC$，$AE\perp AC$. 若$DE=\sqrt{6}$，求CE.

【参考答案】

(1)由已知和余弦定理得$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B=9$，所以$AC=3$. 又$AB=3$，故$\angle B=\angle C$. 因此$\cos A=\cos(\pi-2B)=1-2\cos^2B=\dfrac{1}{3}$.

(2)由题意得，$\cos\angle ADE=\cos(\pi-B)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故$\sin\angle ADE=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. 由已知和(1)得，$\sin\angle DAE=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\angle BAC\right)=\cos\angle BAC=\dfrac{1}{3}$.

在$\triangle ADE$中，由正弦定理得 $AE=DE\times\dfrac{\sin\angle ADE}{\sin\angle DAE}=6$. 因此 $CE=\sqrt{AC^2+AE^2}=3\sqrt{5}$.

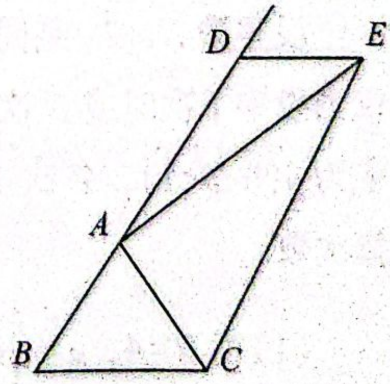
【考查目标】

试题考查正弦定理、余弦定理、倍角公式和诱导公式等基础知识，通过求解三角形来考查学生的直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养以及化归与转化等数学思想.

【试题分析】

(1)**思路1**　题设给出了三角形两边的值及其夹角的余弦值，直接利用余弦定理便可求出另一边 $AC=3$，从而发现$\triangle ABC$为等腰三角形，得到$\angle B=\angle C$，再利用 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$和 $\cos A=\cos(\pi-2B)=1-2\cos^2 B$ 便可求得 $\cos A=\dfrac{1}{3}$.

思路2　过A作BC的垂线，垂足为F，由 $BF=AB\cdot\cos B=\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}BC$ 可知F为BC的中点，所以 $\cos\angle BAC=\cos 2\angle BAF=2\cos^2\angle BAF-1=2\sin^2 B-1=1-2\cos^2 B=\dfrac{1}{3}$.



(2) 由(1)知 $AC=3$. 由 $AE\perp AC$ 和勾股定理知，仅需求 AE. 因为$DE/\!/BC$, $AE\perp AC$，故由(1)知$\triangle ADE$的三个角的正余弦值均可计算. 再由 $DE=\sqrt{6}$，发现可直接利用正弦定理求 AE. 过程同参考答案.

【试题亮点】

试题从$\triangle ABC$出发，利用垂直和平行关系构造出一个确定的四边

形，考查应用正弦定理、余弦定理、勾股定理、两倍角公式和诱导公式等求解三角形的基础知识和技能，着重考查学生的直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养. 试题面向全体学生，构图清晰明了，设问指向明确，解题方法常规，试题难度适宜，和课标的理念完全吻合.

学生根据题意直接利用余弦定理可确定$\triangle ABC$的未知边长，再利用倍角公式和诱导公式便可顺利完成第一问的解答. 在第一问解答的基础上，结合题设，学生可以确定$\triangle ADE$的三个内角，利用正弦定理确定AE，再利用勾股定理解得所求边长. 学生具备基本的化归与转化的数学思想即可依题意顺利作答.

试题难度较小，计算量不大，既有效考查了学生对求解三角形的基本定理、基本公式的理解，又考查了学生运用所学知识分析问题、解决问题的能力，让学生既学有所用又学有所得，有利于学生以良好的状态进入后面试题的作答.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅰ卷第17题

【试题】

设整数$N\geqslant 2$. 某同学用一个球进行投篮练习，至多投篮N次. 当且仅当投中1次时或N次均未投中时，停止练习. 设该同学每次投中的概率为$p(0<p<1)$，各次投中与否相互独立. 记X为停止练习时该同学的投篮次数.

(1) 当$N=4$，$p=\dfrac{1}{3}$时，求X的分布列；

(2) 设k，m均为自然数.

(ⅰ) 当$k\leqslant N-1$时，求$P(X>k)$；

(ⅱ) 当$k+m\leqslant N-1$时，证明：$P(X>k+m \mid X>k)=P(X>m)$.

【参考答案】

(1)当 $N=4$ 时，X 的所有可能取值为 1，2，3，4. 为求 X 的分布列，分别计算 $P(X=i)$ $(i=1, 2, 3, 4)$. 在投中情况相互独立的假设下，

$P(X=1)=\frac{1}{3}$，$P(X=2)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$，$P(X=3)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，

$P(X=4)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$. 从而 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{8}{27}$

(2)(ⅰ)X 的所有可能取值为 1，2，…，N. 记 $q=1-p$，则 $0<q<1$.

由前述分析知，$P(X=N)=q^{N-1}$，$P(X=k)=pq^{k-1}(1\leqslant k\leqslant N-1)$.

$$\begin{aligned}P(X>k)=P(X\geqslant k+1)&=P(X=k+1)+\cdots+P(X=N-1)+P(X=N)\\&=pq^k+\cdots+pq^{N-2}+q^{N-1}\\&=q^k(1-q^{N-1-k})+q^{N-1}\\&=q^k.\end{aligned}$$

所以，当 $k\leqslant N-1$ 时，$P(X>k)=(1-p)^k$.

(ⅱ)由(ⅰ)知，当 $k+m\leqslant N-1$ 时，$P(X>k+m)=(1-p)^{k+m}$，$P(X>k)=(1-p)^k$，$P(X>m)=(1-p)^m$. 所以

$$P(X>k+m\mid X>k)=\frac{P(X>k+m)}{P(X>k)}=\frac{(1-p)^{k+m}}{(1-p)^k}=(1-p)^m=P(X>m).$$

【考查目标】

试题通过简单的生活场景引出问题，主要考查了离散型随机变量及其分布列，在较广泛的情形下求解与该随机变量有关的概率与条件概率，并得到一般的概率等式. 在计算过程中，兼顾考查了概率的基本性质、

乘法公式以及事件的相互独立性.

【试题分析】

题述停止练习时该同学的投篮次数 X 是一个随机变量，容易看出 X 的所有可能取值为 1，2，…，N（至少投篮 1 次，至多投篮 N 次），因此 X 是一个离散型随机变量. 根据定义，当 $N=2$ 时，事件 $\{X=1\}$ 发生意味着该同学第 1 次投篮投中；事件 $\{X=2\}$ 发生意味着该同学第 1 次投篮未投中. 当 $N\geqslant 3$ 时，事件 $\{X=1\}$ 发生意味着该同学第 1 次投篮即投中；事件 $\{X=2\}$ 发生意味着该同学第 1 次投篮未投中，第 2 次投篮投中；……；事件 $\{X=N\}$ 发生意味着该同学前 $(N-1)$ 次投篮均未投中，但不管第 N 次投篮投中与否（因为至多投篮 N 次）.

(1) **思路 1** 求出每个事件的概率. 过程同参考答案.

思路 2 将求某事件的概率转化为求其对立事件的概率.

例如，若已经求得 $P(X=i)\ (i=1,\ 2,\ 3)$，则由概率的基本性质知，

$$P(X\neq 4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{19}{27},$$

可知 $P(X=4)=1-P(X\neq 4)=\dfrac{8}{27}$，从而得到 X 的分布列.

注意到以下事实是有益的：事件 $\{X=1\}$ 发生当且仅当该同学第 1 次投篮即投中，事件 $\{X=N\}$ 发生当且仅当该同学前 $(N-1)$ 次投篮均未投中. 所以，对给定的 N 和 p，也可以先计算事件 $\{X=1\}$ 发生的概率，以及事件 $\{X=N\}$ 发生的概率. 事实上，我们总有

$$P(X=1)=p,\ P(X=N)=(1-p)^{N-1}.$$

因此，在第(1)小问中，计算得到 $P(X=2)$ 后，可通过对立事件求得 $P(X=3)=1-P(X\neq 3)=1-P(X=1)-P(X=2)-P(X=4)$，进而得到分布列，过程不再赘述.

(2)(ⅰ) X 的所有可能取值为 1，2，…，N. 记 $q=1-p$，则 $0<q<1$. 由前述分析知，$P(X=N)=q^{N-1}$，$P(X=j)=pq^{j-1}\ (1\leqslant j\leqslant N-1)$.

思路 1 通过事件$\{X=j\}$($j=k+1$, …, N)的概率进行计算. 过程同参考答案.

思路 2 通过事件$\{X=j\}$($j=1$, …, k)的概率进行计算.

当$k=0$时, 显然$P(X>0)=1$;

当$1\leqslant k\leqslant N-1$时,

$$P(X=1)+\cdots+P(X=k)=p+\cdots+pq^{k-1}=1-q^k,$$

因此

$$P(X>k)=1-P(X\leqslant k)=1-(P(X=1)+\cdots+P(X=k))=q^k.$$

综上, 当$k\leqslant N-1$时, $P(X>k)=q^k=(1-p)^k$.

思路 3 根据事件$\{X>k\}$发生的等价命题, 直接进行概率的计算.

当$1\leqslant k\leqslant N-1$时, 事件$\{X>k\}$发生等价于该同学前$k$次投篮均未投中. 一方面, 如果该同学前$k$次投篮有某次投中, 那么练习在投中时即已停止, 于是$X\leqslant k$, 即事件$\{X>k\}$不会发生; 另一方面, 如果该同学前k次投篮均未投中, 那么需要进行第$(k+1)$次投篮(注意到$k\leqslant N-1$), 则停止练习时该同学的投篮次数大于等于$(k+1)$, 即事件$\{X>k\}$发生.

当$k=0$时, 显然$P(X>0)=1$; 当$1\leqslant k\leqslant N-1$时, 该同学前$k$次投篮均未投中的概率为$q^k$, 因此$P(X>k)=q^k$.

综上, 当$k\leqslant N-1$时, $P(X>k)=q^k=(1-p)^k$.

(ⅱ)由(1)得到$P(X>k+m)$, $P(X>k)$和$P(X>m)$, 再结合条件概率的定义, 即可得证. 过程同参考答案.

【试题拓展】

我们可以对本题稍作拓展, 仍记$q=1-p$, 则由前述分析得到一般情形下X的分布列:

X	1	2	…	$N-1$	N
P	p	pq	…	pq^{N-2}	q^{N-1}

计算可得 X 的期望

$$E(X)=p+2pq+\cdots+(N-1)pq^{N-2}+Nq^{N-1}=\frac{1-q^N}{p}.$$

由上式可得到一个结论：随着投篮次数上限 N 趋向于无穷，停止练习时该同学的投篮次数 X 的数学期望趋向于$\frac{1}{p}$.

最后我们指出，本题中，若取消投篮次数上限，即当且仅当该同学投中 1 次时停止练习，记 X 为停止练习时该同学的投篮次数. 仍假设每次投中的概率为 $p(0<p<1)$，各次投中与否相互独立，则随机变量 X 的可能取值为所有正整数，且对任何正整数 j，有 $P(X=j)=p(1-p)^{j-1}$. 此时，称 X 服从参数为 p 的几何分布. 与二项分布、超几何分布一样，几何分布也是一类重要的离散型随机变量的分布，但它们的首要区别在于：服从二项分布或超几何分布的随机变量，所有可能取值为有限个；服从几何分布的随机变量，所有可能取值为无限个（但可以一一列举出来）.

【试题亮点】

试题由简单的生活场景引出，涉及的知识为学生所熟悉，让学生有亲近感，有利于稳定心态去分析、解决问题. 结合"有次数上限的投篮练习"这样一个常见实例，试题综合考查了随机事件的概率求解问题，涉及事件的关系、概率的运算法则、事件的独立性、条件概率的定义等问题. 随机变量及其分布，特别是离散型随机变量及其分布列是中学阶段的重要知识，也是应熟练掌握的教材内容，符合学生期待. 具体来说，本试题包含如下亮点.

(1)试题通过选取适宜的素材，呈现现实中的问题情境，考查学生运用必备知识解释生活中的现象、解决实际中的问题的能力，让学生全面综合展现其学科素养水平.

(2)突出基础性要求，助力"双减"政策落地. 试题探讨的离散型

随机变量及其分布列，以及与之相关的概率、条件概率计算，正是对基础知识和基本技能的深入考查，契合高考“四翼”考查要求中的基础性要求.

(3)重点考查学生的逻辑推理和数学建模等核心素养. 学生首先需要在情境中把握事物之间的关联，准确理解离散型随机变量 X 取某值的实际涵义，进而利用所学概率知识，求得 X 的分布列. 在此过程中，借助互斥事件的概率加法公式等概率的运算法则，可以对部分计算过程进行简化，培养有条理、合乎逻辑的思维品质与理性精神. 接下来，由代入具体 N，p 数值的第(1)问，到较为抽象的第(2)问，又将第(2)问细分为阶段性、提示性任务(ⅰ)与目标性、总结性结论(ⅱ)，循序渐进，启发学生思考，也使得学生能充分展示不同思维.

(4) 试题难度适宜，解题思路多样，从作答时间和考试状态方面都有利于学生继续完成后续两道分值为 17 分的解答题. 问题的设置既避免了重复与繁杂的计算，也能有效体现对学生数学思维的考查，减轻了学生的运算负担，符合课标的基本理念.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅰ卷第 18 题

【试题】

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 $F(-1,0)$，离心率为$\frac{1}{2}$.

(1)求 C 的方程；

(2)设 O 为坐标原点，过 F 且斜率大于 0 的动直线 l 与 C 交于 P，Q 两点，其中 Q 在第三象限，直线 PO 与 C 的另一个交点为 R.

(ⅰ)若$\triangle PQR$ 的面积是$\triangle PFO$ 的面积的 3 倍，求 l 的方程；

(ⅱ)求 $\tan\angle PQR$ 的最小值.

【参考答案】

(1)由题设知 C 的半焦距 $c=1$，$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，故 $a=2$，$b=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，直线 l：$x=my-1(m>0)$，由题设知 $R(-x_1, -y_1)$.

由 $\begin{cases}x=my-1,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，故 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$.

(ⅰ)由题意知 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PQO$ 的面积的 2 倍，且 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍，所以 $\triangle PFO$ 的面积是 $\triangle QFO$ 的面积的 2 倍，由此可得 $y_1=-2y_2$.

由 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$ 可得 $y_1=\frac{12m}{3m^2+4}$，$y_2=-\frac{6m}{3m^2+4}$.

由 $y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$ 可得 $5m^2-4=0$，解得 $m=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$(舍去)，$m=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因此 l 的方程为 $x=\frac{2\sqrt{5}}{5}y-1$.

(ⅱ)设直线 PQ 和直线 QR 的倾斜角分别为 α 和 β，则 $\tan\alpha=\frac{1}{m}$.

因为 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)-2=-\frac{8}{3m^2+4}$，所以 $\tan\beta=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{3}{4}m$.

因此 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$. 因为 Q 在第三象限，所以 $\angle PQR$ 是直线 QR 以点 Q 为旋转中心逆时针旋转到直线 PQ 的旋转角，因此 $\angle PQR=\pi-(\beta-\alpha)$，故

$$\tan\angle PQR=\tan[\pi-(\beta-\alpha)]=-\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=3m+\frac{4}{m}\geqslant 4\sqrt{3},$$

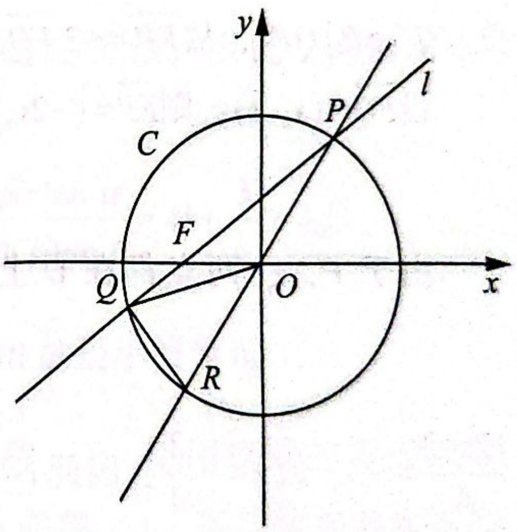
当且仅当 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 时等号成立. 因此 $\tan\angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

【考查目标】

试题以学生熟悉的椭圆和直线为知识素材，考查学生的代数运算能力与整体代入的能力，以及解析几何中的设而不求、数形结合以及化繁为简等思想，是一道较为综合、难度较高的题目.

【试题分析】

(1)依题意先求出半焦距 c，然后结合离心率求出半长轴长 a，再求出半短轴长 b，得到椭圆方程，过程同参考答案.



(2)(ⅰ)**思路 1** 先设出直线 l 的方程(含参数 m)，并得到 y_1，y_2 的和与积，再将面积条件转化为关于 y_1，y_2 的关系式，代入求解，最终解出直线 l 的方程，过程同参考答案. 还可通过 $y_1=-2y_2$ 得到 $y_1+y_2=-y_2$，$y_1y_2=-2y_2^2$，从而 $y_1y_2=-2(y_1+y_2)^2$，再计算 m.

思路 2 先将面积条件转化为关于 y_1，y_2 的关系式，由此可用 x_2，y_2 表示 x_1，y_1，再代入椭圆方程联立解出 x_2，y_2，最后求出直线 l 的方程.

设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，由题设知 $R(-x_1, -y_1)$.

由题意知 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PQO$ 的面积的 2 倍，且 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍，所以 $\triangle PFO$ 的面积是 $\triangle QFO$ 的面积的 2 倍，由此可得 $y_1=-2y_2$. 因此 $\overrightarrow{FP}=2\overrightarrow{QF}$，故 $x_1=-1+2(-1-x_2)=-2x_2-3$.

由于 P，Q 两点都在 C 上，所以$\begin{cases}\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=1,\\ \dfrac{(-2x_2-3)^2}{4}+\dfrac{(-2y_2)^2}{3}=1.\end{cases}$ 消去 y_2 得

$\dfrac{12x_2+9}{4}=-3$，故 $x_2=-\dfrac{7}{4}$，因此 $y_2=\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$（舍去），$y_2=-\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$.

所以 l 的斜率为$\dfrac{0-\left(-\dfrac{3\sqrt{5}}{8}\right)}{(-1)-\left(-\dfrac{7}{4}\right)}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，因此 l 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$.

思路 3 先由条件求出 $|PF|$ 和 $|QF|$ 的关系，通过假设 $\overrightarrow{FQ}$ 来求出直线 l 的斜率，最后得到直线 l 的方程.

由题意知，$\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PQO$ 的面积的 2 倍，且 $\triangle PQR$ 的面积是 $\triangle PFO$ 的面积的 3 倍，所以 $\triangle PFO$ 的面积是 $\triangle QFO$ 的面积的 2 倍，因此 $|PF|=2|QF|$，故 $\overrightarrow{FP}=-2\overrightarrow{FQ}$.

设 $\overrightarrow{FQ}=(s, t)$，则 $\overrightarrow{FP}=(-2s, -2t)$，因此 $Q(s-1, t)$，$P(-2s-1, -2t)$.

由于 P，Q 两点都在 C 上，所以$\begin{cases}\dfrac{(s-1)^2}{4}+\dfrac{t^2}{3}=1,\\ \dfrac{(-2s-1)^2}{4}+\dfrac{(-2t)^2}{3}=1.\end{cases}$ 消去 t 得

$\dfrac{12s-3}{4}=-3$，故 $s=-\dfrac{3}{4}$，因此 $t=\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$（舍去），$t=-\dfrac{3\sqrt{5}}{8}$.

所以 l 的斜率为$\dfrac{-\dfrac{3\sqrt{5}}{8}}{-\dfrac{3}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，因此 l 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x+1)$.

（ⅱ）**思路 1** 先设出直线 l 的方程（含参数 m），并得到 y_1，y_2 的和与积，然后求出直线 QR 的斜率，再计算出 $\tan\angle PQR$ 的值（均含参数 m），最后使用基本不等式得到 $\tan\angle PQR$ 的最小值，过程同参考答案.

思路 2 设而不求，先得到直线 l 的斜率与直线 QR 的斜率之间的关系，再求出 $\tan\angle PQR$ 的最小值.

设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，由题设知 $R(-x_1, -y_1)$. 注意到直线 l 的斜率为 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，而直线 QR 的斜率为 $\frac{y_2+y_1}{x_2+x_1}$，两者的乘积为 $\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}$. 由条件知 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，故 $\frac{y_2^2-y_1^2}{x_2^2-x_1^2}=-\frac{3}{4}$. 设 l 的斜率为 k，则直线 QR 的斜率为 $-\frac{3}{4k}$.

设直线 PQ 和直线 QR 的倾斜角分别为 α 和 β，则 $\tan\alpha=k$，$\tan\beta=-\frac{3}{4k}$.

因此 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$. 因为 Q 在第三象限，所以 $\angle PQR$ 是直线 QR 以点 Q 为旋转中心逆时针旋转到直线 PQ 的旋转角，因此 $\angle PQR=\pi-(\beta-\alpha)$，故

$$\tan\angle PQR=\tan[\pi-(\beta-\alpha)]=-\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=4k+\frac{3}{k}\geqslant 4\sqrt{3},$$

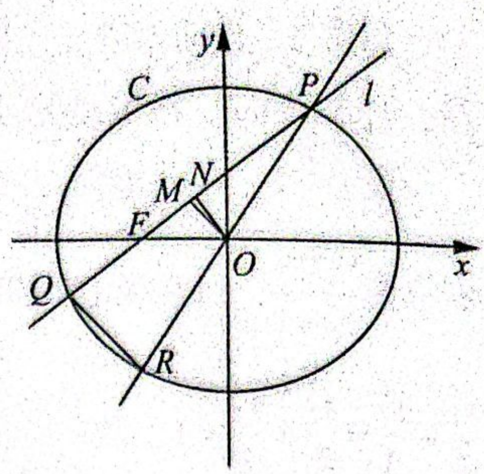
当且仅当 $k=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立. 因此 $\tan\angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

思路 3 先设出直线 l 的方程（含参数 m），使用作图的方式确定 $\angle PQR$ 是锐角，并求出 $\tan\angle PQR$ 的值（含参数 m），最后使用基本不等式得到 $\tan\angle PQR$ 的最小值.

设 $P(x_1, y_1)$，$Q(x_2, y_2)$，直线 l：$x=my-1\ (m>0)$，由题设知 $R(-x_1, -y_1)$.

由 $\begin{cases} x=my-1, \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，故 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$.

设 M 是线段 PQ 的中点，则 M 的纵坐标为$\frac{3m}{3m^2+4}$，结合直线 l 的方程知 M 的横坐标为 $m\cdot\frac{3m}{3m^2+4}-1=-\frac{4}{3m^2+4}$. 注意 MO 是 $\triangle PQR$ 的 QR 边上的中位线，故 $\angle PQR=\angle PMO$.



作 $ON\perp PQ$ 于 N，则 $|ON|$ 就是点 O 到直线 l 的距离，即为$\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$.

由 $ON\perp PQ$ 知 ON 的斜率为$-m$，故 $N\left(-\frac{1}{m^2+1},\ \frac{m}{m^2+1}\right)$.

由$\frac{m}{m^2+1}>\frac{3m}{3m^2+4}$知 N 处于 M 的右上方，故 $\angle PMO$ 是锐角，即 $\angle PQR$ 是锐角，所以

$$\tan\angle PQR=\frac{|ON|}{|MN|}=\frac{\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}}{\sqrt{m^2+1}\left(\frac{m}{m^2+1}-\frac{3m}{3m^2+4}\right)}=\frac{3m^2+4}{m}=3m+\frac{4}{m}\geqslant 4\sqrt{3},$$

当且仅当 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$时等号成立. 因此 $\tan\angle PQR$ 的最小值为 $4\sqrt{3}$.

【试题亮点】

试题以解析几何中的交点、比例和最值问题为载体，第(1)问是求解椭圆方程的问题，这部分内容是圆锥曲线中的基础内容，考查了学生对椭圆焦点坐标、离心率定义等基础知识的理解和掌握；第(2)问中的第(ⅰ)问加入了面积的元素，需要学生将面积比例的条件转化为线段比例或坐标比例的条件，然后再结合有参数的方程将参数解出，考查解析几何中化繁为简的思想，符合试题“多想少算”的考查理念. 在这一问中，适当的平面几何转化是必须的，这考查了学生的数形结合思想，以

及在数学学科的不同模块内容中进行知识迁移的能力. 第(2)问的第(ⅱ)问是求$\angle PQR$正切值的最小值问题，无论使用哪种方法，都无需真正解出点P，Q，R的坐标，再次体现了试题“多想少算”的考查理念.

本试题虽然是解析几何的问题，但其中加入了平面几何和三角函数的元素，希望学生在面对具体问题时，能将自己学习到的各个模块的知识有机地结合到一起进行应用，体现了试题的综合性、灵活性以及对学生考查的全面性，有助于选拔具有科学素养，能够举一反三，进行自主探究的拔尖创新型人才.

【试题出处】 2026年高考数学全国Ⅰ卷第19题

【试题】

已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且当$x<0$时，$f(x)=2^x$. 对任意$x_0\in\mathbf{R}$，定义集合$D(x_0)=\{d\in\mathbf{R}\mid f(x_0+d)>f(x_0)\}$.

(1)若当$x\geqslant 0$时，$f(x)=1-x$，求$D(-1)$；

(2)若$f(x)$是奇函数，$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，且$x_1x_2\neq 0$，证明：$D(x_2)\subseteq D(x_1)$；

(3)设$f(x)$满足：①若$f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则$D(x_2)\subseteq D(x_1)$；②当$0<x<1$时，$f(x)<f(0)$.

(ⅰ)证明：$f(0)\geqslant 1$；

(ⅱ)证明：$f(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增.

【参考答案】

(1)$d\in D(-1)$当且仅当$f(d-1)>f(-1)=\dfrac{1}{2}$.

当$d<1$时，由$f(d-1)=2^{d-1}>\dfrac{1}{2}$知$d>0$；当$d\geqslant 1$时，由$f(d-1)=$

$1-(d-1)>\frac{1}{2}$知$d<\frac{3}{2}$. 因此$D(-1)=\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$.

(2)由已知得$f(0)=0$，且当$x>0$时，$f(x)=-f(-x)=-2^{-x}$.

故由题设知，仅需讨论三类情形：$x_1\leqslant x_2<0$，$0<x_1\leqslant x_2$，$x_2<0<x_1$.

若$x_1\leqslant x_2<0$，则$D(x_1)=(0,\ -x_1)$，$D(x_2)=(0,\ -x_2)$，故$D(x_2)\subseteq D(x_1)$；

若$0<x_1\leqslant x_2$，则$D(x_1)=(-\infty,\ -x_1]\cup(0,\ +\infty)$，$D(x_2)=(-\infty,\ -x_2]\cup(0,\ +\infty)$，故$D(x_2)\subseteq D(x_1)$；

若$x_2<0<x_1$，则$D(x_1)=(-\infty,\ -x_1]\cup(0,\ +\infty)$，$D(x_2)=(0,\ -x_2)$，故$D(x_2)\subseteq D(x_1)$.

综上，结论得证.

(3)(ⅰ)若$f(0)<1$，取$\alpha<0$满足$f(\alpha)=2^{\alpha}>f(0)$，由①知$D(\alpha)\subseteq D(0)$. 由$f(x)$在$(\alpha,\ 0)$单调递增知$(0,\ -\alpha)\subseteq D(\alpha)\subseteq D(0)$，与②矛盾. 所以$f(0)\geqslant 1$.

(ⅱ)先证明当$x\in(0,\ +\infty)$时，$f(x)\leqslant 0$.

当$x_0\in(0,\ 1)$时，由②知$f(x_0)<f(0)$，故$-x_0\in D(x_0)$. 若$f(x_0)>0$，取$\beta<0$使得$f(\beta)<f(x_0)$. 由①知$D(x_0)\subseteq D(\beta)$，故$-x_0\in D(\beta)$，即$f(\beta-x_0)>f(\beta)$，与$f(x)=2^x(x<0)$矛盾. 所以当$x_0\in(0,\ 1)$时，$f(x_0)\leqslant 0$.

当$x_0\in[1,\ +\infty)$时，若$f(x_0)>0$，取$\beta<0$使得$f(\beta)<f(x_0)$，故$x_0-\beta\in D(\beta)$. 令$\gamma=\beta-x_0+\frac{1}{2}$，则$\gamma<\beta<0$，从而$0<f(\gamma)<f(\beta)$. 由①知$D(\beta)\subseteq D(\gamma)$，故$x_0-\beta\in D(\gamma)$，所以$f(\frac{1}{2})=f(\gamma+x_0-\beta)>f(\gamma)>0$，与$x\in(0,\ 1)$时，$f(x)\leqslant 0$矛盾. 所以当$x_0\in[1,\ +\infty)$时，$f(x_0)\leqslant 0$.

综上，当$x\in(0,\ +\infty)$时，$f(x)\leqslant 0$.

再证明$f(x)$在$(0,\ +\infty)$单调递增.

对任意x_1，x_2，$0<x_1<x_2$，由$x_1-x_2<0$知$f(x_1-x_2)\in(0,\ 1)$，则

$f(0)\geqslant 1>f(x_1-x_2)$，即 $x_2-x_1\in D(x_1-x_2)$. 又 $f(x_1)\leqslant 0<f(x_1-x_2)$，故由①知 $D(x_1-x_2)\subseteq D(x_1)$，则 $x_2-x_1\in D(x_1)$，得 $f(x_2)>f(x_1)$. 结论得证.

【考查目标】

试题围绕函数与集合主题，通过“新定义”的形式为学生搭建了全新的探究平台. 试题以函数的解析式、奇偶性、单调性，集合的表示、包含关系等相关知识为载体，综合考查学生的逻辑推理、数学运算、创新思维等能力.

【试题分析】

(1) **思路 1** 按 $D(-1)$ 的定义，结合条件转化为求 $f(d-1)>\dfrac{1}{2}$ 的解集，在 $f(x)$ 为分段函数的情况下，采用分类讨论进行求解，过程同参考答案.

思路 2 将集合 $D(x_0)$ 中的被描述量 d 改记为 $x-x_0$，则 $D(x_0)=\{x-x_0\mid f(x)>f(x_0)\}$，故只需解不等式 $f(x)>f(x_0)$，即可得到 $D(x_0)$.

本题中 $f(-1)=\dfrac{1}{2}$. 当 $x<0$ 时，由 $f(x)>\dfrac{1}{2}$ 知 $x\in(-1,0)$；当 $x\geqslant 0$ 时，由 $f(x)=1-x>\dfrac{1}{2}$ 知 $x<\dfrac{1}{2}$. 因此不等式 $f(x)>\dfrac{1}{2}$ 的解为 $-1<x<\dfrac{1}{2}$，进而 $D(-1)=\left\{x+1\mid -1<x<\dfrac{1}{2}\right\}=\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$.

(2) **思路 1** 根据条件可求出 $f(x)$ 的分段解析式，确定任意两处 x_1，x_2 的函数值 $f(x_1)$，$f(x_2)$ 的大小关系，根据题目要求自然分三类情形讨论验证结论，过程同参考答案.

思路 2 由于 $D(x_0)$ 的定义只取决于“对任意实数 d，$f(x_0+d)$ 与 $f(x_0)$ 的大小关系”，因此不必定量地求出 $f(x)$ 的表达式，只需分析所给条件，定性地得知任意两处函数值的大小关系即可.

事实上，由条件知 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 单调递增且恒正，结合 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数，可知 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增且恒

负，$f(0)=0$，从而

$$D(x_0)=\begin{cases}(0,\ -x_0),\ x_0<0,\\(-\infty,\ 0),\ x_0=0,\\(-\infty,\ -x_0]\cup(0,\ +\infty),\ x_0>0.\end{cases}$$

当$f(x_1)\leqslant f(x_2)$且$x_1x_2\neq0$时，分$x_1\leqslant x_2<0$，$0<x_1\leqslant x_2$，$x_2<0<x_1$三类情形讨论，同思路1.

(3)**思路1** 依次证明(ⅰ)(ⅱ)，其中(ⅱ)是本题的核心难点. 证明(ⅱ)相当于要证明对任意x_1，x_2，$0<x_1<x_2$，均有$f(x_1)<f(x_2)$，即$x_2-x_1\in D(x_1)$.

受$f(x)$满足性质①的启发，若能找到一个实数a，使得$f(x_1)\leqslant f(a)$且$x_2-x_1\in D(a)$，就能借助①所提供的集合包含关系$D(a)\subseteq D(x_1)$，推出$x_2-x_1\in D(x_1)$，即可完成证明.

当$a<x_1-x_2$时，利用$f(x)$在区间$(-\infty,\ 0)$单调递增，可知$x_2-x_1\in D(a)$，故仅需再对某个$a<x_1-x_2$证明$f(x_1)\leqslant f(a)$(在(ⅰ)已得证的情况下，由于可确定$f(x)$在区间$(-\infty,\ 0]$单调递增，$a<x_1-x_2$可放宽为$a\leqslant x_1-x_2$). 考虑到$0<x_1<x_2$时，$2^{x_1-x_2}$可任意接近0，至此可将目标合理转化为：证明当$x\in(0,\ +\infty)$时，$f(x)\leqslant0$.

实际操作中，可先利用②通过反证法证明当$x\in(0,\ 1)$时$f(x)\leqslant0$，再对剩余情况$x\in[1,\ +\infty)$证明$f(x)\leqslant0$. 也可以先统一对$x\in(0,\ +\infty)$证出$f(x)\notin(0,\ f(0))$，再排除$f(x)\geqslant f(0)$的可能. 两种思路实质相同，仅在书写细节上稍有差异. 以前者为例，推理过程如参考答案所示.

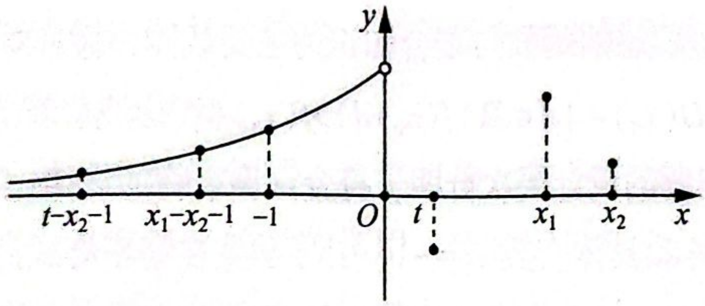
思路2 直接考虑如何对任意x_1，x_2，$0<x_1<x_2$，证明$f(x_1)<f(x_2)$. 此时，否定$f(x_1)\geqslant f(x_2)$的过程需要较长的逻辑链，与思路1的工作本质相当，但书写中仅牵涉有限个与x_1，x_2，$f(x_1)$，$f(x_2)$有关的用于导出矛盾的自变量与函数值. 以下给出一种证明过程.

为方便起见，写出①的逆否命题①'：若$D(x_2)\not\subseteq D(x_1)$(即存在$a$，使得$a\in D(x_2)$但$a\notin D(x_1)$)，则$f(x_1)>f(x_2)$. 由于①'与①等价，故$f(x)$亦满足①'.

(ⅰ)任取 $a\in(0,\ 1)$，由②得 $a\notin D(0)$．而 $f(-a)=2^{-a}>2^{-2a}=f(-2a)$，故 $a\in D(-2a)$，从而由①'得 $f(0)>f(-2a)=2^{-2a}$．由 $a\in(0,\ 1)$ 的任意性，可知 $f(0)\geqslant 1$．

(ⅱ)对任意 x_1，x_2，$0<x_1<x_2$，我们用反证法来证明 $f(x_1)<f(x_2)$．假设 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则 $x_2-x_1\notin D(x_1)$，又由 $2^{-1}>2^{x_1-x_2-1}$ 知 $x_2-x_1\in D(x_1-x_2-1)$，故由①'得 $f(x_1)>f(x_1-x_2-1)$，从而 $x_2+1\in D(x_1-x_2-1)$．

取实数 $t<x_1$ 满足 $t\in(0,\ 1)$，由②知 $f(0)>f(t)$，即 $-t\in D(t)$，又由 $2^{-x_2-1}<2^{t-x_2-1}$ 知 $-t\notin D(t-x_2-1)$，故由①'得 $f(t-x_2-1)>f(t)$，从而 $x_2+1\notin D(t-x_2-1)$．以上涉及的自变量与函数值的示意图如下．



结合 $x_2+1\in D(x_1-x_2-1)$ 与 $x_2+1\notin D(t-x_2-1)$，由①'得 $f(t-x_2-1)>f(x_1-x_2-1)$，即 $2^{t-x_2-1}>2^{x_1-x_2-1}$，与 $t<x_1$ 矛盾．从而 $f(x_1)<f(x_2)$．

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 单调递增．

注： 上述(ⅱ)的证明回避了(ⅰ)的结论．若利用(ⅰ)的结论，则可以类似地得到 $x_2-x_1\in D(x_1-x_2)$，用以替代 $x_2-x_1\in D(x_1-x_2-1)$，并将对 $f(x_1-x_2-1)$，$f(t-x_2-1)$ 的分析平行地替换成对 $f(x_1-x_2)$，$f(t-x_2)$ 的分析，这样书写细节上可稍作简化．

对于(ⅱ)中推导矛盾的过程，可概括为：基于反证法假设 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，找出了一个 $t(0<t<x_1)$ 及一个 $d(d>x_1)$(上述 d 取为 x_2+1)，使得 $f(t)<f(t-d)<f(x_1-d)<f(x_1)$，最终导致 $d\in D(x_1-d)$，$d\notin D(t-d)$，$f(t-d)<f(x_1-d)$ 三者矛盾．

本结论的推导逻辑链长，解法高度开放．在不同的推理路径中，一种共性的行之有效的策略是对形如 a，b，$a-d$，$b-d$ 的一组数，利用性质

①和所给函数的性质挖掘$f(a)$，$f(b)$，$f(a-d)$，$f(b-d)$之间大小关系的信息. 事实上，$f(a)$，$f(a-d)$的大小关系决定了d是否属于$D(a-d)$，$-d$是否属于$D(a)$；$f(b)$，$f(b-d)$的大小关系决定了d是否属于$D(b-d)$，$-d$是否属于$D(b)$；$f(a)$，$f(b)$的大小关系决定了$b-a$是否属于$D(a)$，$a-b$是否属于$D(b)$；$f(a-d)$，$f(b-d)$的大小关系决定了$b-a$是否属于$D(a-d)$，$a-b$是否属于$D(b-d)$. 如此能使性质①获得大量运用机会，通过限制$f(a)$，$f(b)$，$f(a-d)$，$f(b-d)$的大小关系的各种可能性，最终逐步完成论证推理.

【试题亮点】

试题以学生熟悉的函数与集合知识为主要载体，通过对函数$f(x)$和实数x_0引入集合$D(x_0)=\{d\in\mathbf{R}\mid f(x_0+d)>f(x_0)\}$，形成崭新的概念框架和问题情境. 三个问题的设计层次分明，符合认识事物的规律. 第(1)问通过设置具体函数$f(x)$和具体实数$x_0=-1$，引导学生在解不等式的常规操作过程中初步理解新定义. 第(2)问要求学生在已知$x<0$时$f(x)$的表达式的情况下，运用奇函数的条件得到$f(x)$的完整信息，在此基础上研究集合$D(x_1)$，$D(x_2)$之间的包含关系，从而深化对新定义的理解. 第(3)问在学生已熟悉新定义的基础上，通过设置由新定义集合的包含关系所反映的函数性质，要求学生进行抽象函数情形下的性质推导. 面对这组新颖的问题，学生需要摒弃以往的解题模板，进行真实的现场探索，在解答过程中展现对基础知识的熟练运用和深层理解，展现创造性地解决问题的能力.

试题的设计紧密围绕教材中的主干内容，注重对平时教学的引导. 试题覆盖函数主题中的指数函数、函数的概念与性质，以及预备知识主题中的集合与逻辑用语等，引导中学注重基础知识的教学. 试题将各种基本概念与性质通过新定义有机串联成一体，并设置了无法借助导数研究函数单调性的“抽象函数”场景，回避了学生常规训练中导数题的一些机械的解题套路. 这有助于促进中学阶段合理认识导数工具价值，合理定位导数教学，引导中学教学更好地意识到，“从定义出发”在数学

上比解题套路和技巧更为重要，引导中学教学加强学生对概念与性质的本质认识及它们相互关系的深层次思考，而不是随意深挖解题套路，生搬高等数学内容.

试题还注重强调科学素养、创新意识和创新思维，引领学生的长远发展. 试题重点考查数学证明，要求学生周密思考、严谨论证、规范表达. 在问题情境、呈现方式、解题思路创新的基础上，试题提供了充分的拓展空间，可以激起学生和广大数学爱好者的兴趣，进行更深更广的课题研究. 未来有志于从事科学研究的学生，可以从探索活动中获得前期的科研体验，使能力与心理得到成长，为即将进入高校和未来投人科学研究打下基础. 因而，试题有助于培养学生严谨求实的科学素养，以及不畏挑战、探索创新的科学精神，在服务选才的同时立足人才的长远培养，起到立德树人的作用.

总体而言，试题在情境创新、教学引导、数学内涵、评价功能、拓展空间等诸多方面具有很好的示范作用，延续了近年全国新高考一卷压轴题的特色，充分体现了高考“立德树人，服务选才，引导教学”的核心功能.

全国Ⅱ卷

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第1题

【试题】

$(1-3i)^2=$

A. $-8+6i$　　B. $-8-6i$　　C. $8+6i$　　D. $8-6i$

【参考答案】 B

【考查目标】

试题考查复数的概念、复数的基本运算. 试题强调基础性，立足于对基础知识和基本运算的考查.

【试题分析】

本题用复数的乘法运算法则计算.

本题中，$(1-3i)^2=1-6i+(3i)^2=-8-6i$. 故选B.

【试题亮点】

试题考查复数的概念及其基本运算法则，体现了课标对复数学习的基本要求，引导学生了解数系的扩充，掌握复数的基本概念与基本运算，同时避免繁琐的计算与技巧训练. 本题作为整套试卷的第1小题，立足

课标，计算量小，考查指向明确，考查基础内容，利于学生得分. 特别地，题目以学生熟悉的知识形态呈现，有利于稳定学生情绪与考试心态，助力学生正常发挥.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第2题

【试题】

已知集合 $A=\{0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 9\}$，$B=\{x\mid\sqrt{x}=x\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,\ 1\}$　　B. $\{3,\ 6\}$

C. $\{0,\ 1,\ 9\}$　　D. $\{0,\ 3,\ 9\}$

【参考答案】 A

【考查目标】

试题考查集合的概念、集合的基本表示方法、集合的交的运算. 试题立足基础，考查学生基本的逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

本题的集合 B 是用描述法给出，利用代数方程 $\sqrt{x}=x$ 给出集合的元素. 因此需要先求解方程.

由原方程可得 $x\geqslant0$，因此原方程可化为 $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0$，解得 $x=0$ 或 $x=1$. 因此集合 $B=\{0,\ 1\}$，所以 $A\cap B=\{0,\ 1\}$. 故选 A.

【试题亮点】

列举法和描述法是两种常见的表示集合的方法，前者将集合的所有元素一一列举出来，后者则利用集合中全部元素的共同特征来表示集合.

本题分别用列举法和描述法表示两个集合，要求学生求出这两个集合的交集. 试题表述简洁规范，属于学生熟悉的知识范畴，突出基础性考查.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第3题

【试题】

已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【参考答案】 D

【考查目标】

试题考查向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积等基础知识，考查学生的数学运算能力和化归与转化的思想.

【试题分析】

根据两个向量和的模与两个向量差的模，联立方程求得这两个向量的数量积.

由 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$ 可得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=1$. 由 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$ 可得 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=3$. 两式相减得 $4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}$.

故选 D.

【试题亮点】

向量是数学中的基本概念，在包括数学、物理、计算机科学与技术、经济学等在内的众多学科都有广泛而重要的应用，同时是解决相关学科中各种问题的重要工具. 试题考查向量的概念、向量的运算等知识，学生可以利用向量的代数运算求解. 试题考查的内容源于教材，面向全体学生，立足基本概念和方法，属于简单题目. 试题能让学生增强自信心，有利于学生正常发挥.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 4 题

【试题】

设双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 经过点 $(1, 0)$ 和点 $\left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}, 3\right)$，则 C 的渐近线方程为

A. $y=\pm 3\sqrt{2}x$　　　　B. $y=\pm 2\sqrt{3}x$

C. $y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{6}x$　　　　D. $y=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}x$

【参考答案】 B

【考查目标】

试题考查双曲线渐近线的概念及其方程，考查学生的数学运算能力.

【试题分析】

由题设得$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}=1,\\ \dfrac{7}{4a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=2\sqrt{3}$，所以渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x=\pm 2\sqrt{3}x$.

故选 B.

【试题亮点】

平面解析几何的学习要求学生能在平面直角坐标系中认识圆锥曲线的几何特征，运用代数方法解决几何问题. 数形结合是解决平面解析几何问题的基本方法. 双曲线的渐近线方程反映了双曲线上远离坐标原点的点的横、纵坐标之间的近似比例关系，也决定了双曲线图形开口大小以及在坐标系中所处的区域，对于从几何上理解双曲线的性质有重要意义. 试题以双曲线为背景，考查点在曲线上的含义以及双曲线渐近线的概念. 本题题干简洁，设问明确，解题思路清晰，突出通性通法，注重对基础知识和学科素养的考查.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 5 题

【试题】

已知棱台的上、下底面均是有一个内角为60°的菱形，上、下底面的边长分别为 2，3，该棱台的高为$\sqrt{3}$，则其体积为

A. $\dfrac{19}{12}$　　B. $\dfrac{19}{6}$　　C. $\dfrac{19}{4}$　　D. $\dfrac{19}{2}$

【参考答案】 D

【考查目标】

试题考查棱台的基本概念及其体积公式，考查学生的直观想象能力和数学运算能力.

【试题分析】

由题设可得棱台的上、下底面的面积分别为 $2\times2\sin 60^\circ=2\sqrt{3}$ 和 $3\times3\sin 60^\circ=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$，则棱台体积为

$$\frac{1}{3}h(S_1+\sqrt{S_1S_2}+S_2)=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\left(2+\sqrt{2\times\frac{9}{2}}+\frac{9}{2}\right)\sqrt{3}=\frac{19}{2}.$$

故选 D.

【试题亮点】

试题考查棱台的基础知识，考查学生对棱台体积公式的掌握. 试题背景简单，设问清晰，只需掌握菱形的面积公式，就可以利用棱台体积公式得到结果. 试题属于基础题型，难度不大，有利于学生正常发挥，有利于稳定学生考试心理.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 6 题

【试题】

把甲、乙、丙、丁等 8 位员工分为 A，B 两个技术攻关组，要求每组 4 人，其中甲、乙同组，丙、丁不同组，则分组方案共有

A. 10 种　　B. 12 种　　C. 16 种　　D. 24 种

【参考答案】 C

【考查目标】

试题考查计数原理和排列组合知识，考查学生应用计数原理解决简单实际问题的能力和数学运算能力.

【试题分析】

思路1 按甲、乙同在A组或同在B组分为两类.

如果甲、乙同在A组，那么需要在丙、丁中选一位分在A组，再在另4位员工中选一位分在A组，剩下的4位员工分在B组，此时的分组方案共有$2\times4=8$种. 同样地，甲、乙同在B组的分组方案共有8种.

因此分组方案共有$8+8=16$种，故选C.

思路2 按丙、丁分别在两个不同组分为两类.

若丙在A组且丁在B组，那么A组的另外三位成员可以是甲、乙及另4位员工中的一位，或另4位员工中的三位，此时的分组方案共有$4+4=8$种. 同样地，丙在B组且丁在A组的分组方案共有8种.

因此分组方案共有$8+8=16$种，故选C.

【试题亮点】

试题选择学生熟悉的分组问题为情境设计了一个简单的计数问题. 学生首先需要读懂题目，清楚分组要求，在此基础上结合基本计数原理和方法便可求得问题的答案. 试题设计源于教材，考查内容紧扣基础，所设情境贴近学生实际，有助于提高学生的获得感并稳定学生考试心态. 试题有效地考查了排列组合知识及分类计数的数学思想，考查了学生的数学应用素养和运算求解能力.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第7题

【试题】

已知α为第二象限角，$3\sin 2\alpha\cos\alpha=8\sin\alpha\cos 2\alpha$，则$\dfrac{1+\sin\alpha}{2-\cos\alpha}=$

A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{3}{5}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{5}{12}$

【参考答案】 C

【考查目标】

试题考查同角三角函数的基本关系式、三角函数恒等变换，着重考查学生的逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

根据所求表达式，只要解出满足已知条件的$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，然后代入所求表达式即可得到相应结果.

思路1　因为α为第二象限角，所以$\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$. 因为$3\sin 2\alpha\cos\alpha=8\sin\alpha\cos 2\alpha$，所以$6\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha=8\sin\alpha(2\cos^2\alpha-1)$，整理得$\cos^2\alpha=\dfrac{4}{5}$，解得$\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，从而$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 代入得$\dfrac{1+\sin\alpha}{2-\cos\alpha}=$

$\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{5}}{5}}{2+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}}=\dfrac{1}{2}$. 故选C.

思路2　因为α为第二象限角，所以$\cos\alpha<0$，$\tan\alpha<0$. 因为$3\sin 2\alpha\cos\alpha=8\sin\alpha\cos 2\alpha$，故$\alpha\neq\dfrac{3\pi}{4}$，$\cos 2\alpha\neq 0$，所以$8\tan\alpha=3\tan 2\alpha$.

由倍角公式得 $8\tan\alpha=3\times\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$，解得 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$. 从而 $\cos\alpha=-2\sin\alpha$，代入 $\frac{1+\sin\alpha}{2-\cos\alpha}=\frac{1+\sin\alpha}{2+2\sin\alpha}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

思路 3 因为 α 为第二象限角，所以 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$. 由 $3\sin 2\alpha\cos\alpha=8\sin\alpha\cos 2\alpha$ 得 $5\sin\alpha\cos 2\alpha=3(\sin 2\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos 2\alpha)=3\sin\alpha$. 所以 $\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 于是

$$\frac{1+\sin\alpha}{2-\cos\alpha}=\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}}{2+\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{1}{2}.$$ 故选 C.

【试题亮点】

三角函数恒等变换是高中数学的基础知识和主干内容. 要求学生能够熟练掌握三角函数恒等变换的公式和基本运算，特别是正弦与余弦的倍角公式、两角和与差公式等.

试题以第二象限角 α 为对象，构建 $3\sin 2\alpha\cos\alpha=8\sin\alpha\cos 2\alpha$，从而可以确定 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 的取值，最终求得所给关于 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 表达式的大小.

试题的题干清晰明确，表达方式为学生所熟悉. 试题题面中和解答中的数值简单，计算量小，而且预设有多条解题路径，选择不同解法均可作答.

试题以核心知识为载体，重点考查学生的逻辑推理能力和数学运算能力. 试题内容和考查方式均有利于引导高中数学教学重视核心基础知识和基本运算能力.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第8题

【试题】

已知$f(x)$是定义域为**R**的偶函数，$f(x)+f(x-2)=0$，且当$x\in\left[\frac{3}{2},3\right]$时，$f(x)=x^2+ax+b$，则

A. $a=-2$，$b=-3$　　　　B. $a=-2$，$b=3$

C. $a=-4$，$b=-3$　　　　D. $a=-4$，$b=3$

【参考答案】 D

【考查目标】

试题考查函数的奇偶性、周期性等基本性质及应用，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养以及函数与方程、化归与转化、数形结合等数学思想.

【试题分析】

思路1　因为$f(x)$是偶函数，所以$f(1)=f(-1)$. 又因为$f(x)+f(x-2)=0$,所以$f(-1)=-f(1)$. 从而$f(1)=0$，$f(3)=-f(1)=0$.

又当$x\in\left[\frac{3}{2},3\right]$时，$f(x)=x^2+ax+b$，故$f(3)=9+3a+b=0$，且当$x\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$时，$f(x)=-(x+2)^2-a(x+2)-b=-x^2-(a+4)x-(2a+b+4)$. 因为$f(x)$是**R**上的偶函数，于是$a+4=0$，得$a=-4$，故$b=-9-3a=3$.

故选D.

思路2　由$f(x)+f(x-2)=0$可得$f(x)=-f(x-2)=f(x-4)$，故$f(x)$是周期为4的函数，再由$f(x)$是偶函数可得$f(1)=0$.

当 $x\in\left[-\frac{5}{2},\ -1\right]$时，$f(x)=f(x+4)=x^2+(a+8)x+4a+b+16$. 又$f(x)$是偶函数，故当 $x\in\left[1,\ \frac{5}{2}\right]$时，$f(x)=x^2-(a+8)x+4a+b+16$，所以$f(1)=9+3a+b=0$. 又因为当 $x\in\left[\frac{3}{2},\ 3\right]$时，$f(x)=x^2+ax+b$，于是$-(a+8)=a$，解得 $a=-4$，$b=-9-3a=3$.

故选 D.

思路 3 由$f(x)$是偶函数及$f(x)+f(x-2)=0$可得$f(x)+f(2-x)=0$，所以 $y=f(x)$关于点$(1,\ 0)$中心对称. 因而$f(1)=0$.

再由$f(x)+f(2-x)=0$可得当 $x\in\left[-1,\ \frac{1}{2}\right]$时，$f(x)=-f(2-x)=-x^2+(a+4)x-4-2a-b$. 又$f(x)$是偶函数，所以 $a+4=0$ 以及 $0=f(1)=f(-1)=-9-3a-b$，解得 $a=-4$，$b=3$.

故选 D.

【试题亮点】

函数是现代数学的基本概念，是描述客观世界中变量关系和规律的基本的数学语言，是解决数学问题的主要工具，同时也是贯穿高中数学课程的主线. 函数的概念与思想方法已渗透到数学的各个领域，是进一步学习数学的重要基础.

函数的解析表达式是函数重要的形式，刻画了变量关系和函数性质. 试题给出函数在较小区间的解析表达式，利用设置的条件，可得到函数在整个定义域上的解析表达式. 学生不用写出函数在整个定义域上的解析表达式，可利用题中所给的特殊性质得到两个待定参数的值，这要求学生对函数的奇偶性、周期性有较深入的理解和掌握. 如果学生能注意到区间$\left[\frac{3}{2},\ 3\right]$长度大于 1，函数周期为 4，并能作恰当的平移，那么将能建立起两个关于待定参数的方程，完

成解答.

试题描述简洁清楚、指向明确，对思维层次有较高要求. 试题重视对函数性质的综合运用，考查数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养以及函数与方程、化归与转化、数形结合等数学思想，体现高考服务选才的核心功能.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第9题

【试题】

已知⊙O：$x^2+y^2=1$，⊙A：$x^2+y^2-6x-8y+k=0$，则

A. 点A的坐标为$(-3,-4)$

B. 当$k=9$时，⊙A与x轴相切

C. 当$k=-11$时，⊙O与⊙A相切

D. 当⊙O与⊙A相交时，两个交点所在直线的方程为$6x+8y-k-2=0$

【参考答案】 BC

【考查目标】

试题基于圆的一般方程，考查学生运用代数方法认识圆的性质以及其位置关系的能力. 试题着重考查学生的直观想象、数学运算等核心素养以及数形结合等数学思想.

【试题分析】

试题选项涉及圆心坐标，直线与圆、圆与圆的位置关系，圆的相交弦的方程. 学生可先通过圆的一般方程配方得到圆心坐标，然后利用相关判定方法和直线与方程的基础知识进行作答.

由已知可得⊙A 的方程为$(x-3)^2+(y-4)^2=25-k$，故圆心 A 的坐标为(3，4)．故选项 A 错误．

由于⊙A 的圆心在(3，4)，当 $k=9$ 时，⊙A 半径为 4，因此⊙A 与 x 轴相切．故选项 B 正确．

因为⊙O 的半径为 1，当 $k=-11$ 时，⊙A 的半径为 6，$OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$，所以⊙O 与⊙A 内切．故选项 C 正确．

当⊙O 与⊙A 相交时，将⊙O 和⊙A 的方程相减可得 $6x+8y-k-1=0$，故两个交点在直线 $6x+8y-k-1=0$ 上，因此两个交点所在直线的方程为 $6x+8y-k-1=0$．故选项 D 错误．

综上，正确选项为 B 和 C．

【试题亮点】

直线的方程、圆的方程以及圆与圆、直线与圆的位置关系是平面解析几何的核心内容，也是感悟平面解析几何蕴含的数学思想的重要载体．试题基于圆的一般方程，考查学生运用代数方法认识圆心和半径等基础知识的能力．若学生能基于圆心和半径作图，便能很快判断前三个选项是否正确．利用直线与圆的基本知识便能判断选项 D 是否正确．这要求学生对与圆相关的基本概念、基本原理、基本方法有较深刻的理解，并对教材的知识能融会贯通．

试题题干简洁，选项设置基础全面，计算量小．学生若对直线与圆的基本概念、基本原理、基本方法有较好的掌握，便能正确作答．试题重视基础，能让大多数学生都有获得感，有利于引导中学教学．

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第10题

【试题】

设等比数列$\{a_n\}$的公比$q\neq 1$，$a_1>0$，$2a_3=a_1+a_2$，记其前n项和为S_n，则

A. $q=-\dfrac{1}{2}$ B. $S_n>\dfrac{2a_1}{3}$

C. $2S_{n+2}=S_{n+1}+S_n$ D. $\sum\limits_{k=1}^{n}S_k>\dfrac{2na_1}{3}$

【参考答案】 ACD

【考查目标】

试题考查等比数列的概念、通项公式与前n项和公式等基础知识，考查学生的逻辑推理能力与数学运算能力.

【试题分析】

利用等比数列的通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$，将题设条件$2a_3=a_1+a_2$转化为关于公比q的方程$2q^2=1+q$，解得$q=1$（舍去），$q=-\dfrac{1}{2}$. 故选项A正确.

利用等比数列前n项和公式$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$得到$S_n=\dfrac{2a_1}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

因为当n是偶数时不满足$S_n>\dfrac{2a_1}{3}$，故选项B错误.

选项C既可以利用等比数列前n项和公式带入验证，也可以利用$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$和等比数列的定义来获得S_{n+2}，S_{n+1}，S_n之间的关系.

（1）由$S_n=\dfrac{2a_1}{3}\left[1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$得

$$2S_{n+2}-S_{n+1}-S_n=\frac{2a_1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left[-2\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right]=0.$$

（2）利用 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 和等比数列的定义得

$$\frac{S_{n+2}-S_{n+1}}{S_{n+1}-S_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=-\frac{1}{2}，整理得 2S_{n+2}=S_{n+1}+S_n.$$

故选项 C 正确.

由于 $S_n=\frac{2a_1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$，可得

$$\sum_{k=1}^{n}S_k=\frac{2a_1}{3}\left[n-\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right]=\frac{2a_1}{3}\left\{n+\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\right\}>\frac{2na_1}{3}.$$

故选项 D 正确.

【试题亮点】

数列是高中数学的主干内容和必备知识，是考查学生关键能力与数学核心素养的良好载体.

本题以等比数列为载体，考查学生对等比数列的概念与前 n 项和公式等基础知识掌握的程度，考查逻辑推理与数学运算能力. 题设条件 $2a_3=a_1+a_2$ 等价于 $2a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，后者与选项 C 中设置的前 n 项和之间的关系一致. 对于公比为 $q(q\neq1)$ 的等比数列 $\{a_n\}$，若 $a_{n+2}=(t+1)a_{n+1}-ta_n$，其中 $t\neq1$，则有 $S_{n+2}=(t+1)S_{n+1}-tS_n$. 证明过程与本题选项 C 的解答相同. 通过 $a_{n+2}=(t+1)a_{n+1}-ta_n$ 得到 $q^2=(t+1)q-t$，解得 $q=1$（舍去），$q=t$. 于是$\frac{S_{n+2}-S_{n+1}}{S_{n+1}-S_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=t$，整理即得到 $S_{n+2}=(t+1)S_{n+1}-tS_n$.

此选项的设置既能引导学生探索未知，又能感受到数学之美. 同时题目只涉及等比数列的定义和前 n 项和公式，容易发现前述规律，有利于增强学生在考场上的信心.

选项 B 和选项 D 可以做类比，选项 B 是关于单项的性质，选项 D 是关于部分和的性质或者是关于整体平均的性质. 单项未必满足某种性质，

但在平均意义下可能满足某种性质. 这反映了数学中蕴含的辩证统一的哲学思想.

试题题干简洁，设问明确，解题思路清晰，引导学生探索未知，感受数学之美. 试题源于教材中等比数列的定义，能科学合理地引导教学，引导学生回归课标、回归课堂，落实基础性、综合性考查要求.

【试题出处】 2026年高考数学全国Ⅱ卷第11题

【试题】

已知抛物线 E：$y^2=8x$，斜率为 $k(k>0)$ 的直线 l 经过点 $(-1,\ 0)$，等边三角形 ABC 的顶点 A 在 E 上，顶点 B，C 均在 l 上. 下列结论正确的有

A. E 的准线方程为 $x=-2$

B. 若 l 与 E 没有公共点，则 $k>\sqrt{2}$

C. 若 l 与 E 的唯一公共点为 B，则 E 的焦点在直线 AB 上

D. 若 $k=2$，则 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{15}$

【参考答案】 ABD

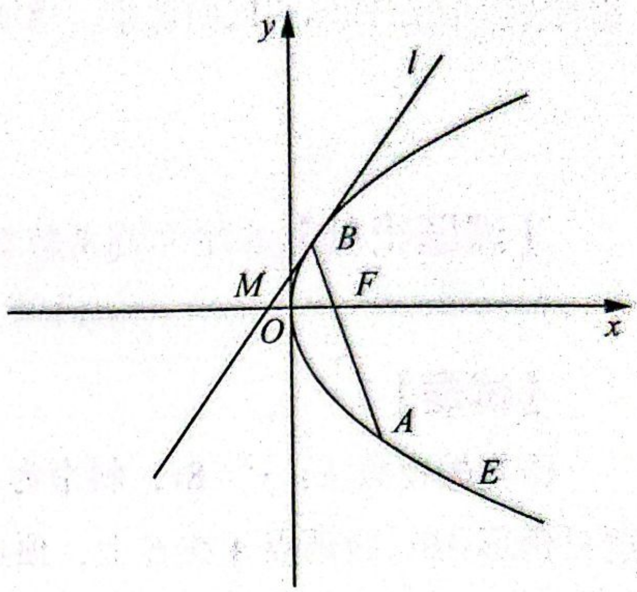
【考查目标】

试题考查抛物线的标准方程，直线与抛物线的基础知识，点到直线的距离，曲线的切线，并考查学生的逻辑思维能力和数学运算能力.

【试题分析】

思路1 由题设可得抛物线的焦点为 $F(2,\ 0)$，准线方程为 $x=-2$，故选项A正确.

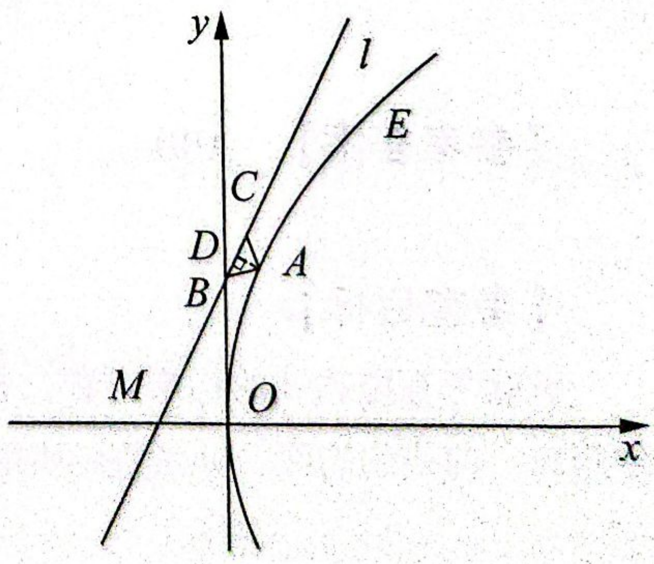
直线 l 的方程为 $y=k(x+1)$，联立抛物线方程得 $\begin{cases}y=k(x+1),\\y^2=8x,\end{cases}$ 所以 $k^2x^2+2(k^2-4)x+k^2=0$. 当 l 与 E 没有公共点时，$4(k^2-4)^2-4k^4<0$，即 $k^2>2$. 由于 $k>0$，所以 $k>\sqrt{2}$，故选项 B 正确.



若 l 与 E 的唯一公共点为 B，从而 $k=\sqrt{2}$，即 $x^2-2x+1=0$，解得 $x=1$，故点 $B(1,\ 2\sqrt{2})$.

记$(-1,\ 0)$为点 M，计算 $\cos\angle MBF$. 若 E 的焦点在直线 AB 上，则有 $\cos\angle MBF=\dfrac{1}{2}$或 $\cos\angle MBF=-\dfrac{1}{2}$. 然而由 $\overrightarrow{BM}=(-2,\ -2\sqrt{2})$，$\overrightarrow{BF}=(1,\ -2\sqrt{2})$得 $\cos\angle MBF=\dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{BM}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，故选项 C 错误.

若 $k=2$，则直线 l 的方程为 $2x-y+2=0$，要使得 $\triangle ABC$ 的面积最小，只要点 A 到直线 l 的距离最小即可.



设点 $A\left(\dfrac{y^2}{8},\ y\right)$，当 $k=2$ 时，点 A 到直线 l 的距离为

$$\frac{\left|2\times\frac{y^2}{8}-y+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{|y^2-4y+8|}{4\sqrt{5}}=\frac{(y-2)^2+4}{4\sqrt{5}},$$

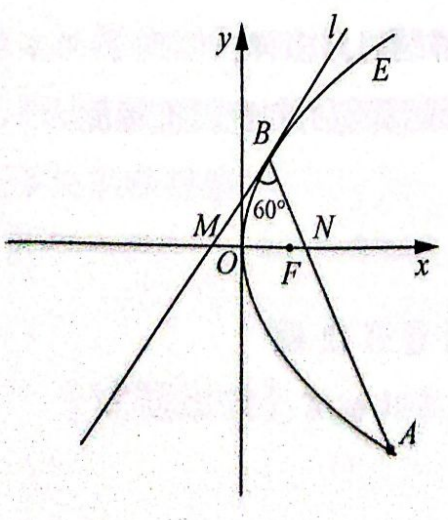
其最小值为$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，此时$\triangle ABC$ 面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\dfrac{\sqrt{3}}{15}$，故选项 D 正确.

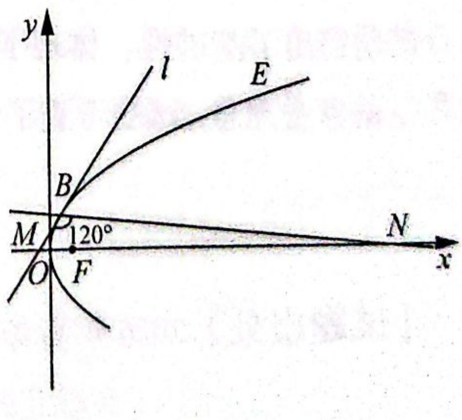
综上，本题的正确选项为 ABD.

思路2 由题设可得抛物线的焦点为 $F(2,0)$，准线方程为 $x=-2$，因此选项A正确.

抛物线在切点为 $(x_0,y_0)(y_0>0)$ 的切线方程为 $y=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_0}}x+\sqrt{2}\sqrt{x_0}$. 若该切线过点 $(-1,0)$，则 $\frac{1}{\sqrt{x_0}}=\sqrt{x_0}$，解得 $x_0=1$，所以该切线斜率为 $\sqrt{2}$. 所以当 $k>\sqrt{2}$ 时，l 与 E 没有公共点. 故选项B正确.

若 l 与 E 的唯一公共点为 B，由以上可知点 $B(1,2\sqrt{2})$. 设直线 AB 与 x 轴的交点为 N，$(-1,0)$ 为点 M. 因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $\angle NBM=60°$ 或 $\angle NBM=120°$. 又 $\tan\angle NMB=k=\sqrt{2}$，故直线 AB 斜率为 $\tan(\angle NBM+\angle BMN)=\frac{\tan\angle NBM+\tan\angle BMN}{1-\tan\angle NBM\cdot\tan\angle BMN}$，从而直线 AB 的斜率为 $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}$ 或 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{6}}$. 故直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}(x-1)+2\sqrt{2}$ 或 $y=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1+\sqrt{6}}(x-1)+2\sqrt{2}$. 因此抛物线的焦点 $F(2,0)$ 不在直线 AB 上. 故选项C错误.





设抛物线的切线斜率为2的切点为 (x_0,y_0)，则 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_0}}=2$，所以 $x_0=$

$\frac{1}{2}$，$y_0=2$. 因为直线 l 的方程为 $2x-y+2=0$，所以点 (x_0, y_0) 到 l 的距离 $\frac{\left|2\times\frac{1}{2}-2+2\right|}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，即抛物线上的点到 l 的距离的最小值为 $\frac{1}{\sqrt{5}}$，所以 $\triangle ABC$ 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{15}$，故选项 D 正确.

综上，本题的正确选项为 ABD.

【试题亮点】

试题以抛物线为背景，结合直线与抛物线的位置关系，构造了一个与等边三角形相关的问题. 选项 A 考查抛物线的标准方程中参数 p 的几何意义，这是基础知识. 选项 B 考查直线与抛物线的位置关系. 抛物线既可以看成是圆锥曲线，也可以看成是二次函数，这样就会有两种方法，即判别式法和切线法. 选项 C 与选项 B 有紧密联系，当直线与抛物线相切时，就是选项 C 的问题，在具体计算时，利用向量可以减少运算量，也可以求出直线 AB 的方程，再判断焦点 F 是否在直线 AB 上. 选项 D 是最值问题，其实质也是直线与抛物线的位置关系问题，只不过换了一条斜率为 2 的直线. 所以选项 D 与选项 B 一样有两种方法.

试题突出了基础性，体现了综合性. 解题思路多样，体现了“多想少算”的考查理念. 试题考查了学生的数学运算能力和逻辑推理能力.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 12 题

【试题】

记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_1=-1$，$a_4=5$，则 $S_6=$ ________.

【参考答案】 24

【考查目标】

试题考查等差数列的概念、通项公式以及前 n 项和公式等基本内容，并考查学生的逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

根据等差数列的定义和题设条件得到 $\begin{cases} a_1=-1, \\ a_4=a_1+3d=5, \end{cases}$ 解得 $d=2$. 再根据等差数列前 n 项和公式 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$，得 $S_6=6a_1+15d=-6+30=24$.

【试题亮点】

试题给出等差数列的两项的值，求等差数列的前 6 项和. 等差数列由首项和公差完全决定，一般两个条件就可以完全确定一个等差数列. 学生通过题设给出的两个条件，求出首项与公差，再利用等差数列的前项 n 和公式即可获得所求问题的结论.

试题面向全体学生，条件简洁，指向明确，学生只需掌握等差数列的概念和通项公式便可得出正确的结果，有利于增加学生的自信心，提高学生的获得感.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 13 题

【试题】

若函数 $f(x)=2^x+2^{2-x}-m$ 有两个零点，则 m 的取值范围是__________.

【参考答案】 $(4, +\infty)$

【考查目标】

试题考查学生对不等式解集概念的理解，不等式的性质、不等式求解方法的掌握情况. 试题考查判定函数单调性以及是否存在零点的基本方法.

【试题分析】

试题以函数有两个零点为已知条件，根据函数表达式特点，利用基本不等式可知函数有唯一的最小值，再根据函数性质可知 m 的取值满足条件是充分必要的，因此可得试题结论.

函数 $f(x)=2^x+2^{2-x}-m$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

思路 1 令 $t=2^x(t>0)$，$g(t)=t+\dfrac{4}{t}-m$，则 $g(t)\geqslant 2\sqrt{t\times\dfrac{4}{t}}-m=4-m$，当且仅当 $t=2$ 时，$g(t)$ 取得最小值 $4-m$. 又 $g'(t)=1-\dfrac{4}{t^2}$，则当 $t\in(0, 2)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，当 $t\in(2, +\infty)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增.

由于 $f(x)$ 与 $g(t)$ 零点数相同，$f(x)$ 有两个零点等价于 $4-m<0$. 因此满足条件的 m 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

思路 2 注意到 $f(x)=2^x+2^{2-x}-m=2^x+\dfrac{4}{2^x}-m\geqslant 2\sqrt{2^x\times\dfrac{4}{2^x}}-m=4-m$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立. 从而当 $m\leqslant 4$ 时，函数 $f(x)$ 至多有一个零点.

对 $f'(x)=2^x\ln 2-2^{2-x}\ln 2$. 由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$，则当 $x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递减. 当 $m>4$ 时，$f\left(\log_2\dfrac{4}{2m}\right)>2^{2-\log_2\frac{4}{2m}}-m=m>0$，$f(1)=4-m<0$，$f(\log_2 m+1)>2^{\log_2 m+1}-m=m>0$，从而函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\log_2\dfrac{4}{2m}, 1\right)$ 和区间 $(1, \log_2 m+1)$ 各只存在一个零点. 因此满足条件的 m 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

【试题亮点】

相等关系、不等关系是数学中最基本的数量关系，是构建方程、不等式的基础. 基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a, b\geqslant0)$是常用的不等关系. 试题考查学生对基本不等式和是否存在函数零点的掌握情况，考查灵活应用所学不等式知识的能力. 试题的计算量小，体现出“多想少算”的考查理念.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 14 题

【试题】

已知球 O 的体积为 $4\sqrt{3}\pi$，A，B，C，D 四点均在球 O 的球面上，$\triangle ABC$ 为等边三角形，$DA=DB=DC=\sqrt{2}$，则$\triangle ABC$ 的面积为________.

【参考答案】 $\frac{5\sqrt{3}}{4}$

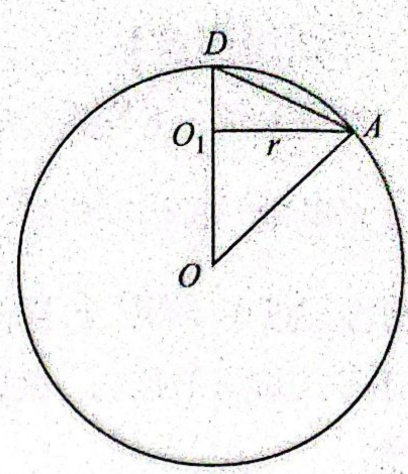
【考查目标】

试题通过 A，B，C，D 四点均在球 O 的球面上构建空间几何体，考查球的基本概念和几何性质，以及学生的空间想象能力、逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

思路 1　设$\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 O_1，半径为 r. 由题设可得球 O 的半径为$\sqrt{3}$，且 D，O，O_1 三点共线. 因为 $DA=\sqrt{2}<\sqrt{3}$，所以 D，O，O_1 的位置关系如下图所示.

因此$\begin{cases} r^2=2-(\sqrt{3}-OO_1)^2, \\ r^2=3-OO_1^2, \end{cases}$解得 $OO_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,



$r=\frac{\sqrt{15}}{3}$. 因为$\triangle ABC$是等边三角形，所以其面积$S=3\times\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

思路 2　设$\triangle ABC$外接圆的圆心为O_1，半径为r. 由题设可得球O的半径为$\sqrt{3}$，且D，O，O_1三点共线. 因为$DA=\sqrt{2}<\sqrt{3}$，所以$\angle AOD$是锐角.

在$\triangle AOD$中，由余弦定理得$\cos\angle AOD=\frac{OA^2+OD^2-DA^2}{2OA\cdot OD}=\frac{2}{3}$，所以

$\sin\angle AOD=\frac{\sqrt{5}}{3}$，所以$r=OA\cdot\sin\angle AOD=\frac{\sqrt{15}}{3}$.

因为$\triangle ABC$是等边三角形，所以其面积$S=3\times\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{4}$.

【试题亮点】

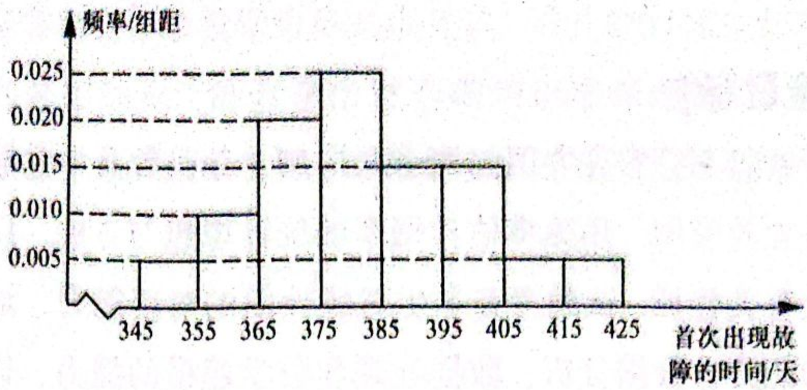
球是基本的几何体，是中学数学的必修内容，试题给出了球面上的四个点，需要学生正确认识四个点在球面上相对位置，进而将问题转化为平面问题. 试题体现课标的要求，聚焦学生学习实际. 试题以球为载体，重视对直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养的考查，能够启发学生深入认识问题的本质，分析问题和解决问题.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 15 题

【试题】

从某厂生产的某种电子产品中随机抽取了若干件进行试验，测试它

们首次出现故障的时间(单位：天)，由试验结果得到如下频率分布直方图：



(1)估计这种电子产品首次出现故障的时间的第一四分位数及中位数(假设数据在组内均匀分布)；

(2)记 $\hat{p}$ 为1件这种电子产品首次出现故障的时间小于365天的概率的估计值.

(ⅰ)求 $\hat{p}$；

(ⅱ)该厂向某用户销售100件这种电子产品，记 X 为这100件电子产品中首次出现故障的时间小于365天的件数，假设 $X\sim B(100,\ \hat{p})$，求 $E(X)$，$D(X)$.

【参考答案】

(1)由频率分布直方图，样本的第一四分位数为

$$365+10\times\frac{0.25-0.15}{0.2}=370,$$

故这种电子产品首次出现故障时间的第一四分位数的估计值为370天.

样本的中位数为

$$375+10\times\frac{0.5-0.35}{0.25}=381,$$

故这种电子产品首次出现故障时间的中位数的估计值为381天.

(2)(ⅰ)由频率分布直方图，这种电子产品首次出现故障的时间小于365天的频率为0.15，故 $\hat{p}=0.15$.

(ⅱ)由已知 $X\sim B(100,\ 0.15)$，故

$$E(X)=100\times0.15=15,\ D(X)=100\times0.15\times0.85=12.75.$$

【考查目标】

试题考查频率分布直方图的概念与应用、分位数及中位数等样本数字特征的概念与应用，用频率估计概率的统计思想与方法，以及二项分布的概念及有关性质．试题考查学生对统计图的解读能力，从统计图中提取信息的能力，数据分析、数据处理和数学建模的能力，以及数学运算的能力．

【试题分析】

(1)根据第一四分位数、中位数的定义，通过频率分布直方图即可得出结果．

(2)先根据频率分布直方图得出 $\hat{p}$，再由二项分布的性质计算 $E(X)$，$D(X)$．

【试题亮点】

在工农业生产中，有大量的数据处理问题，这就需要应用各种统计知识与方法进行处理．试题以电子产品首次出现故障的时间数据为情境设计简单的数据处理问题．通过试验得到一批电子产品的首次出现故障的时间数据，并整理得到频率分布直方图，重点考查学生对频率分布直方图解读及从中提取信息的能力，并进一步要求对总体的分位数、中位数给出估计．试题的问题(2)实际上是求 $E(X)$，$D(X)$ 的估计值，这是由于 $\hat{p}$ 为 1 件电子产品首次出现故障的时间小于 365 天的概率 p 的估计值．试题包含如下亮点．

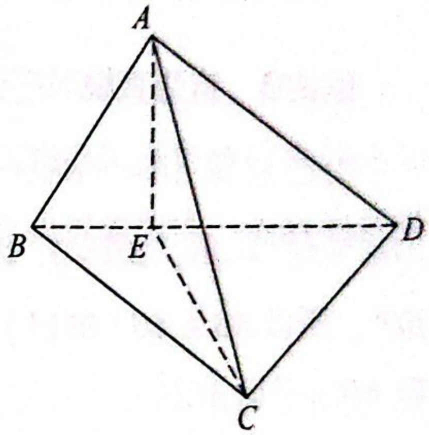
(1)试题设计的情境真实，贴近生产与生活，兼具现实意义与研究价值，能很好地体现数学及统计知识的应用价值．试题体现了对问题情境抽象转化为数学问题过程的考查．学生通过对本题的作答能体会到统

计思想与方法在解决实际问题中的应用.

(2)突出对基础知识的考查. 试题中涉及的分位数、中位数、频率及二项分布等都是中学数学中的基础知识. 设计的问题重点考查学生的基本技能和基础知识，需要学生对基础知识准确理解，对基本概念、基本原理和基本方法熟练掌握. 试题着重于考查学生的思维品质和学科素养.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 16 题

【试题】



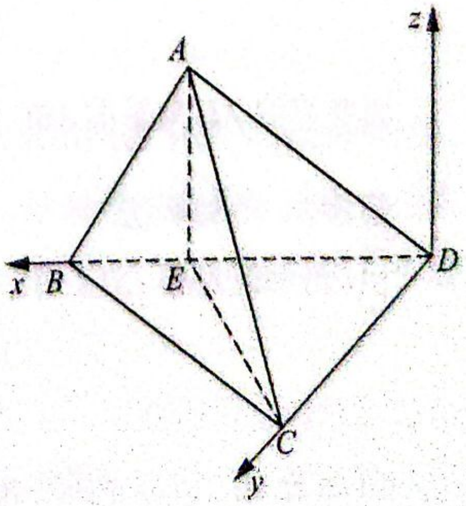
如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，点 E 在 BD 上，$AE\perp CE$，$AE\perp DE$，$CD\perp AD$.

(1)证明：$CD\perp AB$;

(2)若 $DE=2$，$BE=1$，$AE=\sqrt{2}$，$CD=2\sqrt{3}$，求直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值.

【参考答案】

(1)因为 $AE\perp DE$，$AE\perp CE$，所以 $AE\perp$ 平面 ECD，故 $AE\perp CD$.



又因为 $CD\perp AD$，所以 $CD\perp$ 平面 ABD，从而 $CD\perp AB$.

(2)**解法 1**　建立空间直角坐标系.

由(1)知 $CD\perp DE$. 以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DB}$的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，则

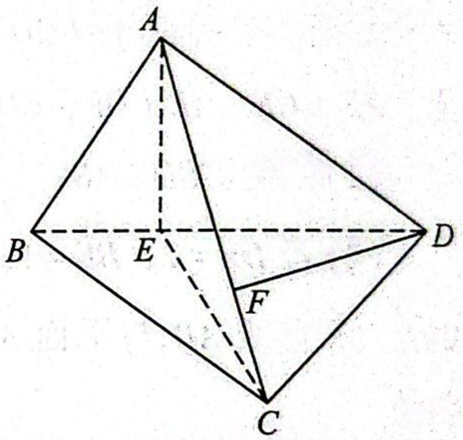
$D(0,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 2\sqrt{3},\ 0)$，$A(2,\ 0,$

$\sqrt{2}$)，$B(3, 0, 0)$，$\overrightarrow{DA}=(2, 0, \sqrt{2})$，$\overrightarrow{CA}=(2, -2\sqrt{3}, \sqrt{2})$，$\overrightarrow{CB}=(3, -2\sqrt{3}, 0)$.

设 $\boldsymbol{m}=(x, y, z)$ 是平面 ABC 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x-2\sqrt{3}y+\sqrt{2}z=0,\\ 3x-2\sqrt{3}y=0,\end{cases}$ 那么可取 $\boldsymbol{m}=(2, \sqrt{3}, \sqrt{2})$. 所以 $\cos\langle\overrightarrow{DA}, \boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{DA}\cdot\boldsymbol{m}}{|\overrightarrow{DA}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

因此直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

解法 2 构造直线与平面所成的角.



由题意得 $AB=\sqrt{BE^2+AE^2}=\sqrt{3}$，$AD=\sqrt{DE^2+AE^2}=\sqrt{6}$，$BD=3$. 因为 $AB^2+AD^2=BD^2$，所以 $AB\perp AD$. 由(1)知 $AB\perp CD$，所以 $AB\perp$ 平面 ACD.

在 $\triangle DAC$ 中，作 $DF\perp AC$，垂足为 F. 由 $AB\perp$ 平面 ACD 得 $AB\perp DF$，所以 $DF\perp$ 平面 ABC，因此 $\angle DAF$ 即为直线 AD 与平面 ABC 所成的角.

因为 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=3\sqrt{2}$，所以 $\sin\angle DAF=\dfrac{DC}{AC}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

因此直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

解法 3 等体积法.

由(1)和题意得 $CD\perp BD$，$BD=3$，所以三棱锥 A-BCD 的体积

$$V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\sqrt{6}.$$

由题意得 $AB=\sqrt{BE^2+AE^2}=\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=3\sqrt{2}$，$BC=$

$\sqrt{BD^2+CD^2}=\sqrt{21}$. 因为 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $AB\perp AC$.

设 D 到平面 ABC 的距离为 h，则三棱锥 $D\text{-}ABC$ 的体积

$$V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times3\sqrt{2}h=\frac{\sqrt{6}}{2}h.$$

由 $V_{D-ABC}=V_{A-BCD}$ 得 $h=2$.

记直线 AD 与平面 ABC 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=\frac{h}{AD}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

因此直线 AD 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

【考查目标】

试题以学生熟悉的三棱锥为载体，通过考查线线垂直、线面垂直、线面所成角的构建等基础知识和基本方法，以及空间直角坐标系的建立和空间向量的坐标表示与运用，考查学生的直观想象能力、逻辑推理能力和数学运算能力.

【试题分析】

(1) 证明空间中两直线垂直的关键是：证明一条直线垂直于另外一条直线所在的平面. 试题要求证明 $CD\perp AB$，而题设给出了 $CD\perp AD$，自然选择证明直线 CD 垂直于直线 AB 所在的平面 ABD. 结合题设条件，根据线面垂直的判定定理进行推导论证即可.

(2) **思路1** 建立空间直角坐标系.

首先建立适当的空间直角坐标系，然后求出问题中涉及的点的坐标，进而得到直线的方向向量和平面的法向量，最后利用向量数量积公式求出直线的方向向量与平面的法向量所成角的余弦值，也就是直线与平面所成角的正弦值.

思路2 构造直线与平面所成的角. 关键在于对线面垂直的判定定理和性质定理的熟练掌握以及在较复杂图形中的灵活应用，难点在于找到

点 D 在平面 ABC 的投影. 试题中只需在 $\triangle DAC$ 作 $DF\perp AC$，结合线面垂直的判定定理和性质定理可证明垂足 F 即为点 D 在平面 ABC 的投影，因此 $\angle DAF$ 即为直线 AD 与平面 $\angle ABC$ 所成的角.

思路 3　等体积法. 试题中容易求出 AD，要得到直线 AD 与平面 $\angle ABC$ 所成的角的正弦值，只需求出点 D 到平面 ABC 的距离. 利用三棱锥 A-BCD 和三棱锥 D-ABC 的体积相等这一事实，结合题设条件，即可求出点 D 到平面 ABC 的距离.

【试题亮点】

试题以学生熟悉在三棱椎为背景，聚焦立体几何的基本概念和基本方法，题干简洁，分层设问，难度适中，解法多样，使学生的不同思维都得到充分发挥. 试题所涉及的线线、线面和面面等关系，蕴含多样的信息量，贴近广大学生的学习实际，给学生提供了不同思维的发挥空间，同时为学生分析问题和解决问题提供了多种思路和方法. 试题有效考查了直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养，以及化归与转化思想，体现了课标对立体几何教学的知识要求和能力要求.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 17 题

【试题】

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos B=\dfrac{3}{4}$，$\cos^2(A+C)+\sin A\sin C=1$.

(1) 证明：$\triangle ABC$ 为钝角三角形；

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，求 $\triangle ABC$ 的周长.

【参考答案】

(1)由题设得 $\sin A\sin C=\sin^2(A+C)=\sin^2 B$，$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，故 $\sin A\sin C=\frac{7}{16}$. 因为 $\cos B=-\cos(A+C)=\sin A\sin C-\cos A\cos C$，所以 $\cos A\cos C=\sin A\sin C-\cos B=-\frac{5}{16}$. 因此 $\cos A<0$ 或 $\cos C<0$，所以 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

(2)记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 由题设得 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，$\sin B=\frac{\sqrt{7}}{4}$，故 $ac=2$.

由 $\cos^2(A+C)+\sin A\sin C=1$ 和正弦定理得 $ac=b^2$，故 $b^2=2$. 由余弦定理得 $a^2+c^2=b^2+2ac\cos B=5$，故 $(a+c)^2=9$. 因此 $a+c=3$，$b=\sqrt{2}$，所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{2}$.

【考查目标】

试题考查三角函数恒等变换、正弦定理和余弦定理等解三角形的基本知识和方法，考查学生的直观想象、逻辑推理和数学运算等核心素养.

【试题分析】

(1)根据三角形的内角情形，三角形分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形，其内角的余弦取值可以作为判定三角形形状的依据. 由题设条件可以看出角 A 和 C 是对称的，所以试题中三角形有角 A 或角 C 为钝角两种情形，直接求出一个角 A 或角 C 余弦值不一定能判定出三角形的形状，因此确定 $\cos A\cos C$ 的正负是证明的关键. 证明过程见参考答案.

(2)根据已知三角形面积和 $\sin B$ 的条件，可得三角形两边之积 $ac=2$，

并由正弦定理可得 $b=\sqrt{2}$. 又由余弦定理可计算出 $a^2+c^2=b^2+2ac\cos B=5$.
因此可得 $(a+c)^2=9$. 故 $\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c=3+\sqrt{2}$.

【试题亮点】

解三角形是高中数学的基础内容之一，突出体现了几何直观与代数运算之间的融合，即通过代数表达式来体现三角形的边角关系.

试题以三角形内角的正弦和余弦取值及其关系为题面，通过正弦、余弦的恒等变换，再联立方程，求出内角余弦值，从而判定三角形的形状，完成第(1)问证明. 第(2)问附加三角形面积条件后，可得到三角形边的等式，进而可求出三角形的周长.

试题条件中角 A 和角 C 是对称的，所以试题中三角形有两种情形，而且直接求出 A 的余弦值不一定能判定出三角形的形状，因此确定 $\cos A\cos C$ 和 $a+c$ 的取值，可以减少运算的复杂度.

试题突出考查基础性、灵活性、创新性，考查学生的数学核心素养，契合考试评价改革后新的评价要求. 试题具有很好的区分度，有利于选拔创新人才.

【试题出处】2026 年高考数学全国Ⅱ卷第 18 题

【试题】

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，过 E 的右焦点且与 x 轴垂直的直线被 E 截得的线段长为 $\sqrt{2}$.

(1)求 E 的离心率；

(2)设 O 为坐标原点，给定点 $G(t,\ 0)(t\neq0)$. $A(x_0,\ y_0)(y_0\neq0)$ 为

E 上的点，过 A 作 y 轴的垂线，垂足为 B. 直线 OA 与直线 GB 的交点为 P，当 A 在 E 上运动时，点 P 的轨迹为 M.

(ⅰ)求 M 的方程；

(ⅱ)当 t 为何值时，M 有对称中心？当 M 有对称中心时，将 M 平移后得到曲线 M'，使得 O 为 M'的对称中心，说明 M'是什么曲线.

【参考答案】

(1)由题设可得$\frac{a^2-1}{a^2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=1$，解得 $a=\sqrt{2}$，所以 E 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)(ⅰ)由(1)知 E 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

直线 OA 的方程为 $y_0x-x_0y=0$，直线 GB 的方程为 $y_0x+ty-ty_0=0$，由题意知 $t+x_0\neq 0$.

设 $P(X,\ Y)$，由$\begin{cases}y_0x-x_0y=0,\\ y_0x+ty-ty_0=0\end{cases}$可得$\begin{cases}X=\frac{tx_0}{t+x_0},\\ Y=\frac{ty_0}{t+x_0},\end{cases}$ 故 $\begin{cases}x_0=\frac{tX}{t-X},\\ y_0=\frac{tY}{t-X}.\end{cases}$

因为 A 在 E 上，所以$\left(\frac{tX}{t-X}\right)^2+2\left(\frac{tY}{t-X}\right)^2=2$，整理得

$$(t^2-2)X^2+4tX+2t^2Y^2-2t^2=0.$$

所以 M 的方程为$(t^2-2)x^2+4tx+2t^2y^2-2t^2=0(y\neq 0)$.

(ⅱ)

当 $t=\sqrt{2}$时，M 的方程为 $y^2=-\sqrt{2}x+1(y\neq 0)$，$M$ 没有对称中心.

当 $t=-\sqrt{2}$时，M 的方程为 $y^2=\sqrt{2}x+1(y\neq 0)$，M 没有对称中心.

当 $t\neq\pm\sqrt{2}$时，M 的方程为$(t^2-2)\left(x+\frac{2t}{t^2-2}\right)^2+2t^2y^2-\frac{2t^4}{t^2-2}=0(y\neq 0)$.

若点$(x_1,\ y_1)$满足 M 的方程，则点$\left(-x_1-\frac{4t}{t^2-2},\ -y_1\right)$也满足 M 的方程. 所

以 M 有对称中心，点$\left(-\frac{2t}{t^2-2},\ 0\right)$为其对称中心. 故当 $t\neq\pm\sqrt{2}$时，M'的方程为$(t^2-2)x^2+2t^2y^2=\frac{2t^4}{t^2-2}(y\neq 0)$.

当$|t|>\sqrt{2}$时，$t^2-2\neq 2t^2$，$t^2-2>0$，此时 M' 为椭圆去掉左、右顶点.

当$0<|t|<\sqrt{2}$时，$t^2-2<0$，此时 M'为双曲线去掉两个顶点.

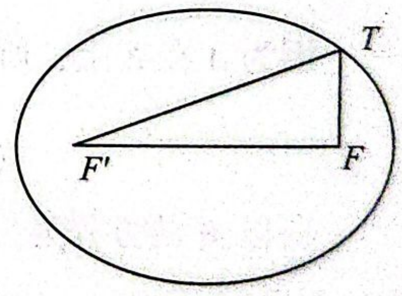
【考查目标】

试题考查椭圆的基本知识和基本概念，以及直线与直线的位置关系. 试题突出考查了解析几何的基本思想和基本方法，考查学生利用曲线的代数方程分析曲线的几何性质的方法，以及数学运算能力、逻辑推理能力和创新能力.

【试题分析】

(1) **思路 1**　利用椭圆的代数方程，过程同参考答案.

思路 2　利用椭圆的几何定义.

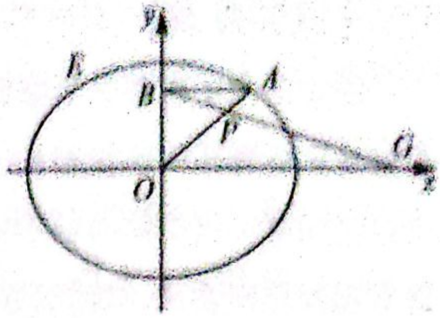


设 F'，F 分别为椭圆的左、右焦点，$TF\perp FF'$，T 在椭圆上. 在 $\mathrm{Rt}\triangle TFF'$ 中，由勾股定理得$(2\sqrt{a^2-1})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\left(2a-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$，解得 $a=\sqrt{2}$，所以 E 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2) **思路**　消去动点参数得到轨迹方程，观察轨迹方程的对称性.

动点 $P(X,\ Y)$与 $A(x_0,\ y_0)$可以相互表示，即$\begin{cases}x_0=f(X,\ Y)\\ y_0=g(X,\ Y)\end{cases}$，利用 $A(x_0,\ y_0)$满足已有的椭圆方程，可以得到 $P(X,\ Y)$满足的方程.

上述这一部分是解析几何中轨迹问题的基本思想和方法.



M 的方程为 $(t^2-2)x^2+4tx+2t^2y^2-2t^2=0(y\neq0)$. 通过观察 M 的方程，容易发现方程是一个标准圆锥曲线平移的结果.

当 $t=\pm\sqrt{2}$ 时，M 的方程为 $y^2=\mp\sqrt{2}x+1(y\neq0)$，这是抛物线的平移，是无心曲线.

当 $t\neq\pm\sqrt{2}$ 时，M 的方程为 $(t^2-2)\left(x+\dfrac{2t}{t^2-2}\right)^2+2t^2y^2-\dfrac{2t^4}{t^2-2}=0(y\neq0)$.

若点 $(x_1,\ y_1)$ 满足 M 的方程，则 $(t^2-2)\left(x_1+\dfrac{2t}{t^2-2}\right)^2+2t^2y_1^2-\dfrac{2t^4}{t^2-2}=0$，从而 $(t^2-2)\left(-x_1-\dfrac{2t}{t^2-2}\right)^2+2t^2y_1^2-\dfrac{2t^4}{t^2-2}=0$，即 $(t^2-2)\left[\left(-x_1-\dfrac{4t}{t^2-2}\right)+\dfrac{2t}{t^2-2}\right]^2+2t^2y_1^2-\dfrac{2t^4}{t^2-2}=0$，因此点 $\left(-x_1-\dfrac{4t}{t^2-2},\ -y_1\right)$ 也满足 M 的方程. 所以 M 有对称中心，点 $\left(-\dfrac{2t}{t^2-2},\ 0\right)$ 为其对称中心.

需要说明的是，这里只证明了点 $\left(-\dfrac{2t}{t^2-2},\ 0\right)$ 是 M 的对称中心，并没有证明 M 只有一个对称中心. 考虑到曲线的性质不依赖曲线的平移而改变，所以找到曲线的一个对称中心作平移，然后研究曲线的性质，并不影响问题的解决.

由以上可知，当 $t\neq\pm\sqrt{2}$ 时，M' 的方程为 $(t^2-2)x^2+2t^2y^2=\dfrac{2t^4}{t^2-2}$ $(y\neq0)$.

此时，M' 的方程是一个无交叉项、无一次项的二元二次方程，二次项系数同号是 M' 的方程表示的曲线是椭圆的必要条件，二次项系数异号是 M' 的方程表示的曲线是双曲线的必要条件.

当 $|t|>\sqrt{2}$ 时，$t^2-2\neq2t^2$，$t^2-2>0$，此时 M' 为椭圆去掉左、右顶点.

当 $0<|t|<\sqrt{2}$ 时，$t^2-2<0$，此时 M' 为双曲线去掉两个顶点.

【试题亮点】

题设给出了椭圆的半短轴长和一条垂直椭圆长轴的焦点弦长，由此很容易求得椭圆的半长轴长 a，从而求出椭圆的离心率. 第(2)问设置一个轨迹问题，其中第(1)问是求轨迹的方程，第(2)问是考查学生是否理解方程的几何意义. 试题很好地体现了高中数学课程中对于解析几何学习与考查的要求，符合学生的学习实际，难度适中，计算量不大. 试题重点考查学生对曲线与方程关系的理解，利用曲线的代数方程研究曲线的几何特征的基本方法，以及学生的分析问题、解决问题的能力及数学运算能力，给学生提供了不同思维的发挥空间，有利于学生的正常发挥，符合考试评价改革对于基础性、综合性和创新性的考查要求，有利于创新人才的选拔. 试题包含如下亮点.

(1)试题注重基础性考查. 圆锥曲线的基本概念和标准方程是圆锥曲线的基础知识和基本技能，试题的第(1)问可以有两种求解方法. 思路 1 基本上是代数思想的运用，重点在于找到椭圆上一个点的坐标，利用方程解决问题. 思路 2 是几何思想的运用，充分利用椭圆的几何定义.

(2)试题注重考查解析几何的基本思想方法. 圆锥曲线的研究经历了四个历史阶段. 第一阶段是公元前古希腊阿波罗尼奥斯阶段，其代表作为《圆锥曲线论》. 阿波罗尼奥斯用纯平面几何的方法证明了几乎所有的圆锥曲线的性质，使得后面的数学家几乎对圆锥曲线的几何性质没有新的贡献. 第二阶段是法国哲学家笛卡尔的《几何学》. 1637 年笛卡尔第一次用代数方程的方法解决了帕波斯问题，标志着近代数学的开端，也标志着解析几何的创立，由此开启了用代数方程研究几何问题的历史，这也是中学解决几何问题的重点. 第三阶段是德沙格、帕斯卡、拉伊尔等用射影几何的方法统一研究圆锥曲线. 第四阶段是欧拉用二次曲线统一研究圆锥曲线. 中学数学课程中的圆锥曲线理论主要是学习第二阶段的部分内容，即把圆锥曲线看成是方程与曲线的统一体. 在“直线与圆”“椭圆”“双曲线”以及“抛物线”等章节的学习中，都要经历求曲线的轨迹方

程的问题，这一过程就好比笛卡尔求解帕波斯问题一样，是解析几何的经典问题，也是解析几何创立的基础. 试题回归解析几何的本原，考查学生对解析几何基本思想方法的掌握.

(3)试题注重与高中教学实际的联系. 考虑到课标对圆锥曲线的要求，只要求学生掌握圆锥曲线的标准方程，因此试题在第(2)问中的第(i)问中，要求学生求出轨迹 M 的方程，这个过程是基本知识和基本技能的考查. 对 M 的方程的几何意义的理解是考查重点，放在了第(2)问中的第(ii)问中. 为了降低学生的运算量，试题设置的结果是标准的圆锥曲线的平移，平移不改变图形的几何意义和几何性质，只改变图形(曲线)的坐标位置(代数表示). 尽管最后得到的 M 的方程看起来比较复杂(含参数 t)，但容易发现曲线 M 是关于 x 轴对称的，而不关于 y 轴对称，根据这些几何性质，结合初中关于平移的几何知识和高中关于函数图像的平移知识，就容易发现所求曲线 M 的方程是标准方程的平移，从而判断参数 t 为何值时，曲线 M 有对称中心.

试题并不要求证明曲线 M 只有一个对称中心，而是找到一个对称中心即可. 这是两个不同的数学问题，其数学逻辑也是不一样的. 一般地，某曲线存在一个对称中心，该曲线一定是中心对称图形，但中心对称图形，可能会有很多对称中心(不止一个对称中心，比如正弦曲线). 根据曲线 M 的方程，找到一个对称中心是不难的. 所以试题为了降低学生的计算量，只考查学生判断曲线 M 是否有对称中心，即曲线 M 是否是中心对称图形，而没有要求证明曲线 M 有唯一的对称中心. 当然有能力的学生可以证明曲线 M 只有唯一的对称中心.

【试题出处】2026年高考数学全国Ⅱ卷第19题

【试题】

已知函数$f(x)=xe^x+ax+b$，曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y=-2x+1$.

(1)求a，b；

(2)当$x>0$时，$f(x+m)-f(x)>m$，求m的取值范围；

(3)当$x>0$时，$f(k+x)+f(k-x)>2f(k)$，求k的最小值.

【参考答案】

(1)**解法1**　由题设可得$f(0)=b$，$f'(x)=(x+1)e^x+a$，故$f'(0)=a+1$，于是曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-b=(a+1)x$，即$y=(a+1)x+b=-2x+1$，所以$a=-3$，$b=1$.

解法2　因为点$(0,f(0))$在切线$y=-2x+1$上，所以$f(0)=b=1$. 又$f'(x)=(x+1)e^x+a$，则$f'(0)=a+1=-2$，故$a=-3$.

故$a=-3$，$b=1$.

(2)设函数$F(x)=f(x+m)-f(x)-m$，则$F(x)=xe^x(e^m-1)+m(e^{x+m}-4)$.

若$m=0$，则有$0=f(x)-f(x)>0$，产生矛盾.

若$m<0$，则当$x>0$时，$F(x)<m(e^{x+m}-4)$，故当$x>2\ln 2-m$时，$F(x)<m(e^{x+m}-4)<0$，从而$f(x+m)-f(x)<m$，与题设矛盾.

若$m>0$，则$xe^x(e^m-1)$和$m(e^{x+m}-4)$在区间$(0,+\infty)$都单调递增，故$F(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增. 由题设可知，当$x>0$时，$F(x)>0$，则$F(0)=m(e^m-4)\geqslant 0$，故$m\geqslant 2\ln 2$. 因此，当$m\geqslant 2\ln 2$，$x>0$时，$F(x)>F(0)\geqslant 0$，此时$f(x+m)-f(x)>m$.

综上，m的取值范围是$[2\ln 2,+\infty)$.

(3)**解法1**　设函数$G(x)=e^{-k}(f(k+x)+f(k-x)-2f(k))=(k+x)e^x+(k-x)e^{-x}-2k$，则$G(0)=0$，由题意知，当$x>0$时，$G(x)>0$.

设 $H(x)=G'(x)=(k+1+x)e^x-(k+1-x)e^{-x}$，则 $H'(x)=(k+2+x)e^x+(k+2-x)e^{-x}=(k+2)(e^x+e^{-x})+x(e^x-e^{-x})$.

若 $k\geqslant-2$，则当 $x>0$ 时，$H'(x)>0$，所以 $H(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增．故当 $x>0$ 时，$G'(x)=H(x)>H(0)=0$，$G(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增．因此当 $x>0$ 时，$G(x)>0$，即 $f(k+x)+f(k-x)>2f(k)$，符合题意．

若 $k<-2$，则当 $x\in(0,-(k+2))$ 时，$H'(x)<0$，所以 $H(x)$ 在区间 $(0,-(k+2))$ 单调递减．故当 $x\in(0,-(k+2))$ 时，$G'(x)=H(x)<H(0)=0$，$G(x)$ 在区间 $(0,-(k+2))$ 单调递减．因此当 $x\in(0,-(k+2))$ 时，$G(x)<0$，不符合题意．

综上，k 的最小值为 -2.

解法 2　由于 $f(k+x)+f(k-x)-2f(k)=e^k(1-e^{-x})(k(e^x-1)+x(e^x+1))$，因此当 $x>0$ 时，$f(k+x)+f(k-x)>2f(k)$ 等价于 $K(x)=k(e^x-1)+x(e^x+1)>0$.

设函数 $L(x)=K'(x)=(k+1+x)e^x+1(x>0)$，则 $L'(x)=(k+2+x)e^x$.

若 $k\geqslant-2$，则当 $x>0$ 时，$L'(x)>0$，所以 $L(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，故当 $x>0$ 时，$K'(x)>L(0)=k+2\geqslant0$，从而 $K(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递增，因此当 $x>0$ 时，$K(x)>K(0)=0$，即 $f(k+x)+f(k-x)>2f(k)$，符合题意．

若 $k<-2$，则当 $x\in(0,-(k+2))$ 时，$L'(x)<0$，故 $L(x)$ 在区间 $(0,-(k+2))$ 单调递减，此时 $K'(x)<L(0)<0$，从而 $K(x)$ 在区间 $(0,-(k+2))$ 单调递减，因此当 $x\in(0,-(k+2))$ 时，$K(x)<0$，不符合题意．

综上，k 的最小值为 -2.

【考查目标】

试题以指数函数和幂函数为载体考查函数的导数及其在不等式问题方面的应用，重点考查如何利用导函数的性质来反映原函数的单调性和极值问题等性质．试题着重考查学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等能力以及综合运用所学知识分析问题解决问题的能力，解答体现了化

归与转化、数形结合、函数与方程等数学思想.

【试题分析】

(1) **思路** 对函数 $f(x)$ 直接求导，便可得到曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线的斜率，再用点斜式得到切线方程，与直线 $y=-2x+1$ 作比较，就能得到 a，b 的值.

(2) **思路** 分情况对辅助函数 $F(x)=f(x+m)-f(x)-m$ 的单调性进行讨论，得到参数 m 的取值范围. 过程同参考答案.

(3) **思路** 借助 $f(x)$ 的表达式，发现 $f(k+x)+f(k-x)-2f(k)$ 有比较简单的表达式，通过分析恰当选取的辅助函数的单调性，并分类讨论确定满足题设的参数 k 的可能取值，得到参数 k 的取值范围，从而得到 k 的最小值.

【试题亮点】

导数是研究函数单调性、极值和最值、零点及不等关系的最有效工具之一，是数学学科最基本的必备知识和主干知识，也是综合考查数学能力与素养的有效载体.

利用导函数的性质来反映原函数的单调性和极值性质是导数应用的主要方向. 试题以指数函数和幂函数为载体，讨论涉及函数的不等式，综合考查学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等能力以及综合运用所学知识分析问题解决问题的能力. 具备化归与转化、数形结合、函数与方程等数学思想的学生，采用通性通法便可顺利作答，但后两问的解答需要具备较好化简求值能力和逻辑推理能力.

试题分层设问，从易到难，逐步递进，引导学生重视思维，理性判断，具有较高的综合性. 试题后两问逻辑性强，考查由浅入深，基于必要的计算，思维深度逐步提升，递进的设问使得不同层次的学生都有发挥的空间，具有较好的区分度和选拔功能. 试题考查导数应用的主干知识，有利于引导高中数学对相关知识板块的教学.

扫码激活使用本书数字服务

1. 扫描下方二维码，关注语文出版社公众号
2. 点击菜单【数字订阅】进入激活页
3. 输入本页激活码，注册并登录
4. 成功激活后，即可使用服务

激活码：

高考试题分析

（2027 年版）

- ◎ 语　　文
- ◎ 数　　学
- ◎ 英　　语
- ◎ 文科综合　地理分册
- ◎ 文科综合　历史分册
- ◎ 文科综合　思想政治分册
- ◎ 理科综合　物理分册
- ◎ 理科综合　化学分册
- ◎ 理科综合　生物学分册
- ◎ 日　　语
- ◎ 俄　　语

★扫封三二维码使用本书数字服务

ISBN 978-7-5187-2795-7

9 787518 727957 >

定价：60.00 元

高考试题分析

2023—2025年高考

数学

全国卷及参考答案

教育部教育考试院　编

中国教育出版传媒集团　语文出版社

2025年普通高等学校招生全国统一考试

全国一卷

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. $(1+5\mathrm{i})\mathrm{i}$ 的虚部为

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 6

2. 已知集合 $U=\{x\mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素的个数为

A. 0　　B. 3　　C. 5　　D. 8

3. 已知双曲线 C 的虚轴长是实轴长的$\sqrt{7}$倍，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$

4. 已知点$(a,0)(a>0)$是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象的一个对称中心，则 a 的最小值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

5. 已知$f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则$f\left(-\frac{3}{4}\right)=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

6. 帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小与方向，测出的结果在航海学中称为视风风速. 视风风速对应的向量是真风风速对应的向量与船行风风速对应的向量之和，其中船行风风速对应的向量与船速对应的向量大小相等、方向相反. 图 1 给出了部分风力等级、名称与风速大小的对应关系. 已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图 2 所示(线段长度代表速度大小，单位：m/s)，则该时刻的真风为

级数	名称	风速大小（单位：m/s）
2	轻风	1.6~3.3
3	微风	3.4~5.4
4	和风	5.5~7.9
5	劲风	8.0~10.7

图 1

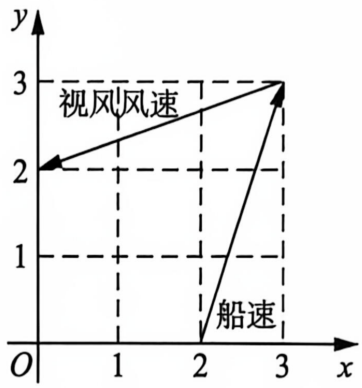


图 2

A. 轻风　　B. 微风　　C. 和风　　D. 劲风

7. 已知圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 的距离为 1 的点有且仅有两个，则 r 的取值范围是

A. (0，1)　　B. (1，3)　　C. (3，+∞)　　D. (0，+∞)

8. 已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x，y，z 的大小关系不可能为

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$　　C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 的中点，则

A. $AD\perp A_1C$　　B. $B_1C_1\perp$平面 AA_1D

C. $AD /\!/ A_1B_1$　　D. $CC_1 /\!/$平面 AA_1D

10. 已知抛物线 C：$y^2=6x$ 的焦点为 F，过 F 的一条直线交 C 于 A，B 两点，过 A 作直线 l：$x=-\dfrac{3}{2}$的垂线，垂足为 D，过 F 且与直线 AB 垂直的直线交 l 于点 E，则

A. $|AD|=|AF|$　　　　B. $|AE|=|AB|$

C. $|AB|\geqslant 6$　　　　D. $|AE|\cdot|BE|\geqslant 18$

11. 已知△ABC 的面积为$\dfrac{1}{4}$，$\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2$，$\cos A\cos B\sin C=\dfrac{1}{4}$，则

A. $\sin C=\sin^2 A+\sin^2 B$　　　　B. $AB=\sqrt{2}$

C. $\sin A+\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　　D. $AC^2+BC^2=3$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的一条切线，则 $a=$__________.

13. 若一个等比数列的各项均为正数，且前 4 项的和等于 4，前 8 项的和等于 68，则这个数列的公比等于__________.

14. 有 5 个相同的球，分别标有数字 1，2，3，4，5，从中有放回地随机取 3 次，每次取 1 个球. 记 X 为这 5 个球中至少被取出 1 次的球的个数，则 X 的数学期望 $E(X)=$__________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15.（13 分）

为研究某疾病与超声波检查结果的关系，从做过超声波检查的人群中随机调查了 1 000 人，得到如下列联表：

组别 \ 超声波检查结果	正常	不正常	合计
患该疾病	20	180	200
未患该疾病	780	20	800
合计	800	200	1 000

(1)记超声波检查结果不正常者患该疾病的概率为 p，求 p 的估计值；

(2)根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，分析超声波检查结果是否与患该疾病有关.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

.

16.（15分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(1)证明：数列$\{na_n\}$是等差数列；

(2)给定正整数m，设函数$f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$，求$f'(-2)$.

17. (15分)

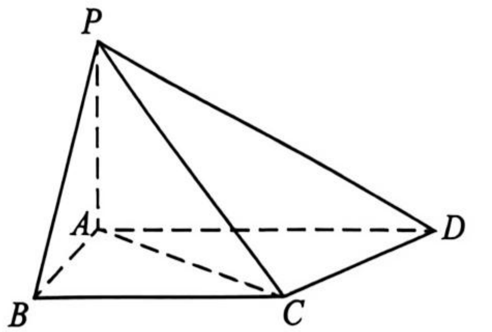
如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AB\perp AD$，$BC/\!/AD$.

(1)证明：平面 $PAB\perp$平面 PAD；

(2)设 $PA=AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$AD=1+\sqrt{3}$，且点 P，B，C，D 均在球 O 的球面上.

(ⅰ)证明：点 O 在平面 $ABCD$ 内；

(ⅱ)求直线 AC 与 PO 所成角的余弦值.



18.（17 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$，下顶点为 A，右顶点为 B，$|AB|=\sqrt{10}$.

(1)求 C 的方程；

(2)已知动点 P 不在 y 轴上，点 R 在射线 AP 上，且满足 $|AP|\cdot|AR|=3$.

（ⅰ）设 $P(m,n)$，求 R 的坐标(用 m，n 表示)；

（ⅱ）设 O 为坐标原点，Q 是 C 上的动点，直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍，求 $|PQ|$ 的最大值.

19.（17 分）

（1）求函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$ 在区间 $\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值；

（2）给定 $\theta\in(0,\ \pi)$ 和 $a\in\mathbf{R}$，证明：存在 $\gamma\in[a-\theta,\ a+\theta]$ 使得 $\cos\gamma\leqslant\cos\theta$；

（3）设 $b\in\mathbf{R}$，若存在 $\varphi\in\mathbf{R}$ 使得 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求 b 的最小值.

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

全国二卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 样本数据 2，8，14，16，20 的平均数为

A. 8　　B. 9　　C. 12　　D. 18

2. 已知 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\frac{1}{z-1}=$

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. -1　　D. 1

3. 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$　　C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

4. 不等式 $\frac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集是

A. $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$　　B. $\{x\mid x\leqslant -2\}$

C. $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$　　D. $\{x\mid x>1\}$

5. 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$

A. 45°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 135°

6. 设抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 A 在 C 上，过 A 作 C 的准线的垂线，垂足为 B. 若直线 BF 的方程为 $y=-2x+2$，则 $|AF|=$

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

7. 记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 若 $S_3=6$，$S_5=-5$，则 $S_6=$

A. -20　　B. -15　　C. -10　　D. -5

8. 已知 $0<\alpha<\pi$，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=$

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$　　D. $\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，q 为$\{a_n\}$的公比，$q>0$. 若 $S_3=7$，$a_3=1$，则

A. $q=\dfrac{1}{2}$　　B. $a_5=\dfrac{1}{9}$　　C. $S_5=8$　　D. $a_n+S_n=8$

10. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant 2$ 当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

11. 双曲线 C：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，左、右顶点分别为 A_1，A_2，以 F_1F_2 为直径的圆与 C 的一条渐近线交于 M，N 两点，且 $\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，则

A. $\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$

B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. C 的离心率为 $\sqrt{13}$

D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 NA_1MA_2 的面积为 $8\sqrt{3}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(x,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(x-1,\ 2x)$，若 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $|\boldsymbol{a}|=$ ______.

13. 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$ ________.

14. 一个底面半径为 4 cm，高为 9 cm 的封闭圆柱形容器(容器壁厚度忽略不计)内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为________cm.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0\leqslant\varphi<\pi)$，$f(0)=\dfrac{1}{2}$.

(1) 求 φ；

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

16. (15 分)

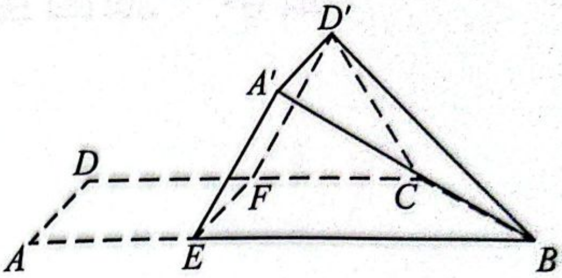
已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4.

(1)求 C 的方程；

(2)过点(0，−2)的直线 l 交 C 于 A，B 两点，O 为坐标原点. 若$\triangle OAB$ 的面积为$\sqrt{2}$，求$|AB|$.

17.（15 分）

如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，$\angle DAB=90°$，F 为 CD 的中点，点 E 在 AB 上，$EF/\!/AD$，$AB=3AD$，$CD=2AD$. 将四边形 $EFDA$ 沿 EF 翻折至四边形 $EFD'A'$，使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 $60°$.



（1）证明：$A'B/\!/$平面 $CD'F$；

（2）求面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值.

18.（17分）

已知函数$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中$0<k<\frac{1}{3}$.

(1) 证明：$f(x)$在区间$(0,+\infty)$存在唯一的极值点和唯一的零点；

(2) 设x_1，x_2分别为$f(x)$在区间$(0,+\infty)$的极值点和零点.

(ⅰ) 设函数$g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$. 证明：$g(t)$在区间$(0,x_1)$单调递减；

(ⅱ) 比较$2x_1$与x_2的大小，并证明你的结论.

19. (17 分)

甲、乙两人进行乒乓球练习，每个球胜者得 1 分，负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$，乙胜的概率为 q，$p+q=1$，且各球的胜负相互独立. 对正整数 $k\geqslant 2$，记 p_k 为打完 k 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率，q_k 为打完 k 个球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

（1）求 p_3，p_4(用 p 表示)；

（2）若 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$，求 p；

（3）证明：对任意正整数 m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

2024年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷（理科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若$z=5+\mathrm{i}$，则$\mathrm{i}(\overline{z}+z)=$

A. $10\mathrm{i}$　　B. $2\mathrm{i}$　　C. 10　　D. 2

2. 已知集合$A=\{1,2,3,4,5,9\}$，$B=\{x\mid\sqrt{x}\in A\}$，则$\complement_A(A\cap B)=$

A. $\{1,4,9\}$　　B. $\{3,4,9\}$　　C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{2,3,5\}$

3. 若x，y满足约束条件$\begin{cases}4x-3y-3\geqslant 0,\\ x-2y-2\leqslant 0,\\ 2x+6y-9\leqslant 0,\end{cases}$则$z=x-5y$的最小值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 0　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. $-\frac{7}{2}$

4. 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和. 已知$S_5=S_{10}$，$a_5=1$，则$a_1=$

A. $\frac{7}{2}$　　B. $\frac{7}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{7}{11}$

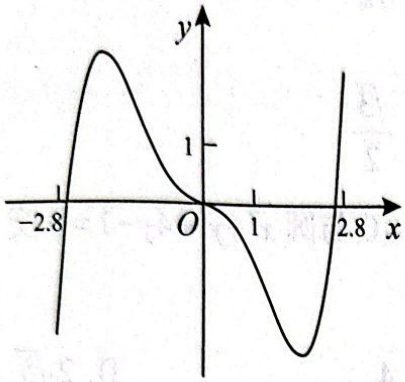
5. 已知双曲线的两个焦点分别为$(0,4)$，$(0,-4)$，点$(-6,4)$在该双曲线上，则该双曲线的离心率为

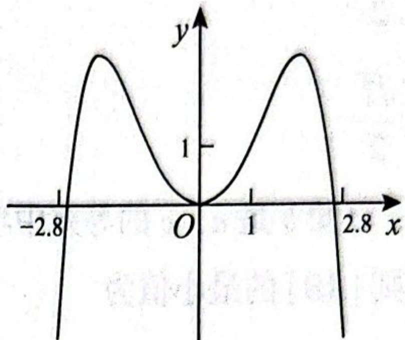
A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

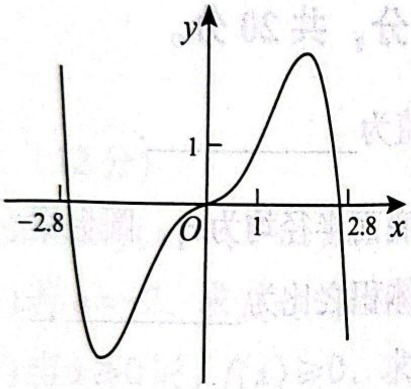
6. 设函数$f(x)=\dfrac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点（0，1）处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为

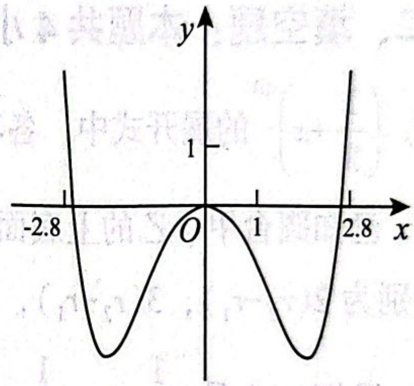
A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

7. 函数 $y=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$ 在区间[−2.8，2.8]的图象大致为

A.


B.


C.


D.


8. 已知$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

A. $2\sqrt{3}+1$　　B. $2\sqrt{3}-1$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $1-\sqrt{3}$

9. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x+1,\ x)$，$\boldsymbol{b}=(x,\ 2)$，则

A. $x=-3$ 是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的必要条件　　B. $x=1+\sqrt{3}$ 是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的必要条件

C. $x=0$ 是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分条件　　D. $x=-1+\sqrt{3}$ 是 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分条件

10. 设 α，β 为两个平面，m，n 为两条直线，且 $\alpha\cap\beta=m$. 下述四个命题：

①若 $m/\!/n$，则 $n/\!/\alpha$ 或 $n/\!/\beta$

②若 $m\perp n$，则 $n\perp\alpha$ 或 $n\perp\beta$

③若 $n/\!/\alpha$ 且 $n/\!/\beta$，则 $m/\!/n$

④若 n 与 α，β 所成的角相等，则 $m\perp n$

其中所有真命题的编号是

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①③④

11. 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$B=60°$，$b^2=\frac{9}{4}ac$，则$\sin A+\sin C=$

A. $\frac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 已知b是a，c的等差中项，直线$ax+by+c=0$与圆$x^2+y^2+4y-1=0$交于A，B两点，则$|AB|$的最小值为

A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$的展开式中，各项系数中的最大值为__________.

14. 已知圆台甲、乙的上底面半径均为r_1，下底面半径均为r_2，圆台甲、乙的母线长分别为$2(r_2-r_1)$，$3(r_2-r_1)$，则圆台甲与乙的体积之比为__________.

15. 已知$a>1$且$\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$，则$a=$__________.

16. 有6个相同的球，分别标有数字1，2，3，4，5，6，从中无放回地随机取3次，每次取1个球. 设m为前两次取出的球上数字的平均值，n为取出的三个球上数字的平均值，则m与n之差的绝对值不大于$\frac{1}{2}$的概率为__________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

某工厂进行生产线智能化升级改造. 升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取150件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总　计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总　计	96	52	2	150

(1)填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有99%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？

(2)已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$. 设 $\overline{p}$ 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率，如果 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，则认为该工厂产品的优级品率提高了. 根据抽取的150件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？($\sqrt{150}\approx 12.247$)

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

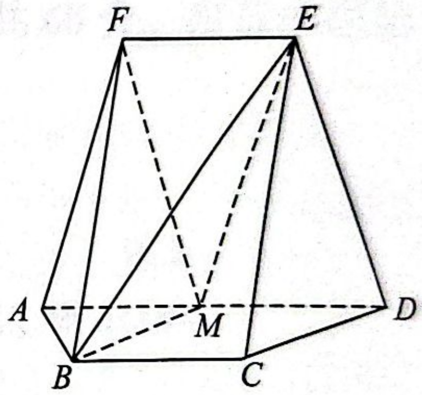
18.（12分）

记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $4S_n=3a_n+4$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)设 $b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（12分）



如图，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形，$EF\parallel AD$，$BC\parallel AD$，$AD=4$，$AB=BC=EF=2$，$ED=\sqrt{10}$，$FB=2\sqrt{3}$，M 为 AD 的中点.

(1)证明：$BM\parallel$平面 CDE；

(2)求二面角 $F-BM-E$ 的正弦值.

20.（12 分）

设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右焦点为 F，点 $M\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$在 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

(1)求 C 的方程；

(2)过点 $P(4,\ 0)$的直线交 C 于 A，B 两点，N 为线段 FP 的中点，直线 NB 交直线 MF 于点 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

21.（12 分）

已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$.

(1)若 $a=-2$，求 $f(x)$的极值；

(2)当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. ［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho\cos\theta+1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程；

(2) 设直线 l：$\begin{cases}x=t,\\y=t+a\end{cases}$（$t$ 为参数），若 C 与 l 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=2$，求 a.

23. [选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

已知实数 a，b 满足 $a+b\geqslant 3$.

(1) 证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

(2) 证明：$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷（文科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 $z=\sqrt{2}\mathrm{i}$，则 $z\overline{z}=$

A. -2　　B. $-\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知集合 $A=\{1,2,3,4,5,9\}$，$B=\{x\mid x+1\in A\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{3,4,9\}$

C. $\{1,2,3,4\}$　　D. $\{2,3,4,5\}$

3. 设向量 $\boldsymbol{a}=(x+1,x)$，$\boldsymbol{b}=(x,2)$，$\boldsymbol{c}=(1,1)$，若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，则 $x=$

A. $\dfrac{5}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{1}{2}$　　D. $-\dfrac{5}{2}$

4. 某独唱比赛的决赛阶段共有甲、乙、丙、丁四人参加，每人出场一次，出场次序由随机抽签确定. 则丙不是第一个出场，且甲或乙最后出场的概率是

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 已知 $S_9=1$，则 $a_3+a_7=$

A. $\dfrac{1}{9}$　　B. $\dfrac{2}{9}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

6. 已知双曲线的两个焦点分别为 $(0,4)$，$(0,-4)$，点 $(-6,4)$ 在该双曲线上，

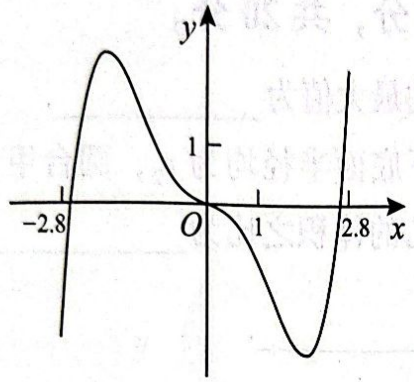
则该双曲线的离心率为

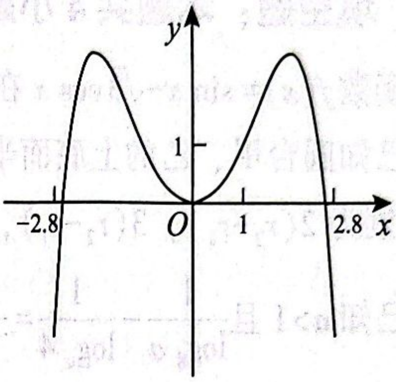
A. 4　　　　B. 3　　　　C. 2　　　　D. $\sqrt{2}$

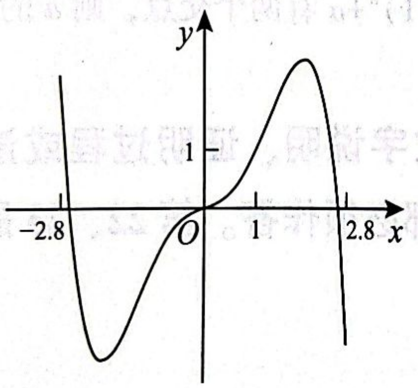
7. 设函数$f(x)=\dfrac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线$y=f(x)$在点(0, 1)处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为

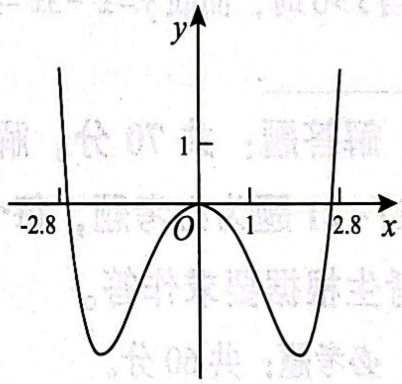
A. $\dfrac{1}{6}$　　　　B. $\dfrac{1}{3}$　　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. $\dfrac{2}{3}$

8. 函数$y=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$在区间$[-2.8, 2.8]$的图象大致为

A. 

B. 

C. 

D. 

9. 直线$2x-y-2=0$与圆$x^2+y^2-6x-8y=0$交于A，B两点，则$|AB|=$

A. 4　　　　B. 5　　　　C. 8　　　　D. 10

10. 已知$\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\sqrt{3}$，则$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=$

A. $2\sqrt{3}+1$　　　　B. $2\sqrt{3}-1$　　　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　　　D. $1-\sqrt{3}$

11. 设α，β为两个平面，m，n为两条直线，且$\alpha\cap\beta=m$. 下述四个命题：

①若$m/\!/n$，则$n/\!/\alpha$或$n/\!/\beta$

②若$m\perp n$，则$n\perp\alpha$或$n\perp\beta$

③若$n/\!/\alpha$且$n/\!/\beta$，则$m/\!/n$

④若 n 与 α，β 所成的角相等，则 $m\perp n$

其中所有真命题的编号是

A. ①③　　B. ②④　　C. ①②③　　D. ①③④

12. 记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $B=60°$，$b^2=\dfrac{9}{4}ac$，则 $\sin A+\sin C=$

A. $\dfrac{3}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 函数 $f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 在区间$[0,\pi]$的最大值为____________.

14. 已知圆台甲、乙的上底面半径均为 r_1，下底面半径均为 r_2，圆台甲、乙的母线长分别为 $2(r_2-r_1)$，$3(r_2-r_1)$，则圆台甲与乙的体积之比为____________.

15. 已知 $a>1$ 且 $\dfrac{1}{\log_8 a}-\dfrac{1}{\log_a 4}=-\dfrac{5}{2}$，则 $a=$____________.

16. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x^3-3x$ 与曲线 $y=-(x-1)^2+a$ 有两个交点，则 a 的取值范围是____________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，已知 $2S_n=3a_{n+1}-3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{S_n\}$的前 n 项和.

18. (12分)

某工厂进行生产线智能化升级改造. 升级改造后，从该工厂甲、乙两个车间的产品中随机抽取150件进行检验，数据如下：

	优级品	合格品	不合格品	总　计
甲车间	26	24	0	50
乙车间	70	28	2	100
总　计	96	52	2	150

(1) 填写如下列联表：

	优级品	非优级品
甲车间		
乙车间		

能否有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？能否有99%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异？

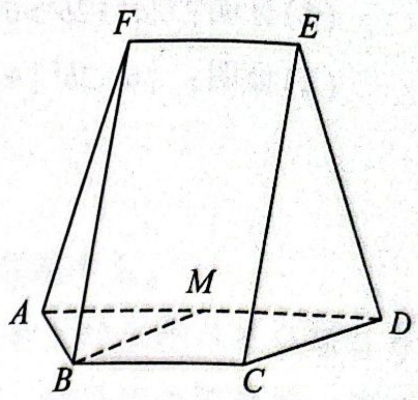
(2) 已知升级改造前该工厂产品的优级品率 $p=0.5$. 设 $\overline{p}$ 为升级改造后抽取的 n 件产品的优级品率，如果 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，则认为该工厂产品的优级品率提高了. 根据抽取的150件产品的数据，能否认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了？($\sqrt{150}\approx 12.247$)

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

19.（12分）

如图，在以 A，B，C，D，E，F 为顶点的五面体中，四边形 $ABCD$ 与四边形 $ADEF$ 均为等腰梯形，$EF \parallel AD$，$BC \parallel AD$，$AD = 4$，$AB = BC = EF = 2$，$ED = \sqrt{10}$，$FB=2\sqrt{3}$，M 为 AD 的中点.



(1)证明：$BM \parallel$ 平面 CDE；

(2)求 M 到平面 FAB 的距离.

20.（12分）

已知函数 $f(x)=a(x-1)-\ln x+1$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)设 $a \leqslant 2$，证明：当 $x>1$ 时，$f(x)<e^{x-1}$.

21.（12分）

设椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 F，点 $M\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$ 在 C 上，且 $MF\perp x$ 轴.

(1)求 C 的方程；

(2)过点 $P(4,\ 0)$ 的直线交 C 于 A，B 两点，N 为线段 FP 的中点，直线 NB 交直线 MF 于点 Q，证明：$AQ\perp y$ 轴.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4-4：坐标系与参数方程］（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=\rho\cos\theta+1$.

(1) 写出 C 的直角坐标方程；

(2) 设直线 l：$\begin{cases}x=t,\\y=t+a\end{cases}$（$t$ 为参数），若 C 与 l 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=2$，求 a.

23. [选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

已知实数 a，b 满足 $a+b\geqslant 3$.

(1) 证明：$2a^2+2b^2>a+b$；

(2) 证明：$|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅰ卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$，$B=\{-3,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,\ 0\}$　　B. $\{2,\ 3\}$

C. $\{-3,\ -1,\ 0\}$　　D. $\{-1,\ 0,\ 2\}$

2. 若 $\dfrac{z}{z-1}=1+\mathrm{i}$，则 $z=$

A. $-1-\mathrm{i}$　　B. $-1+\mathrm{i}$　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(0,\ 1)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ x)$，若 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-4\boldsymbol{a})$，则 $x=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

4. 已知 $\cos(\alpha+\beta)=m$，$\tan\alpha\tan\beta=2$，则 $\cos(\alpha-\beta)=$

A. $-3m$　　B. $-\dfrac{m}{3}$　　C. $\dfrac{m}{3}$　　D. $3m$

5. 已知圆柱和圆锥的底面半径相等，侧面积相等，且它们的高均为 $\sqrt{3}$，则圆锥的体积为

A. $2\sqrt{3}\pi$　　B. $3\sqrt{3}\pi$　　C. $6\sqrt{3}\pi$　　D. $9\sqrt{3}\pi$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, & x<0,\\ \mathrm{e}^x+\ln(x+1), & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty, 0]$　B. $[-1, 0]$　C. $[-1, 1]$　D. $[0, +\infty)$

7. 当 $x\in[0, 2\pi]$时，曲线 $y=\sin x$ 与 $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)$的交点个数为

A. 3　B. 4　C. 6　D. 8

8. 已知函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时 $f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是

A. $f(10)>100$　B. $f(20)>1\ 000$

C. $f(10)<1\ 000$　D. $f(20)<10\ 000$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 随着“一带一路”国际合作的深入，某茶叶种植区多措并举推动茶叶出口. 为了解推动出口后的亩收入(单位：万元)情况，从该种植区抽取样本，得到推动出口后亩收入的样本均值 $\bar{x}=2.1$，样本方差$s^2=0.01$.已知该种植区以往的亩收入 X 服从正态分布 $N(1.8, 0.1^2)$，假设推动出口后的亩收入 Y 服从正态分布 $N(\bar{x}, s^2)$，则

(若随机变量 Z 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，则 $P(Z<\mu+\sigma)\approx0.841\ 3$)

A. $P(X>2)>0.2$　B. $P(X>2)<0.5$

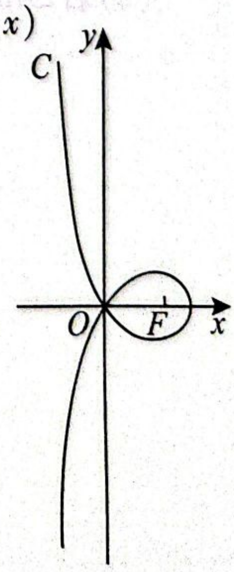
C. $P(Y>2)>0.5$　D. $P(Y>2)<0.8$

10. 设函数$f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则

A. $x=3$ 是$f(x)$的极小值点　B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C. 当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$　D. 当$-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

11. 设计一条美丽的丝带，其造型  可以看作图中的曲线 C 的一部分. 已知 C 过坐标原点 O，且 C 上的点满足：横坐标大于-2；到点 $F(2, 0)$的距离与到定直线 $x=a(a<0)$的距离之积为 4. 则



A. $a=-2$

B. 点$(2\sqrt{2}, 0)$在 C 上

C. C 在第一象限的点的纵坐标的最大值为 1

D. 当点(x_0, y_0)在 C 上时，$y_0\leqslant\dfrac{4}{x_0+2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 设双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2. 过 F_2 作平行于 y 轴的直线交 C 于 A，B 两点. 若 $|F_1A|=13$，$|AB|=10$，则 C 的离心率为____________.

13. 若曲线 $y=e^x+x$ 在点$(0,\ 1)$处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 $a=$____________.

14. 甲、乙两人各有四张卡片，每张卡片上标有一个数字，甲的卡片上分别标有数字 1，3，5，7，乙的卡片上分别标有数字 2，4，6，8. 两人进行四轮比赛. 在每轮比赛中，两人各自从自己持有的卡片中随机选一张，并比较所选卡片上数字的大小，数字大的人得 1 分，数字小的人得 0 分，然后各自弃置此轮所选的卡片(弃置的卡片在此后的轮次中不能使用). 则四轮比赛后，甲的总得分不小于 2 的概率为____________.

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$，$a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$.

(1)求 B；

(2)若△ABC 的面积为 $3+\sqrt{3}$，求 c.

16.（15分）

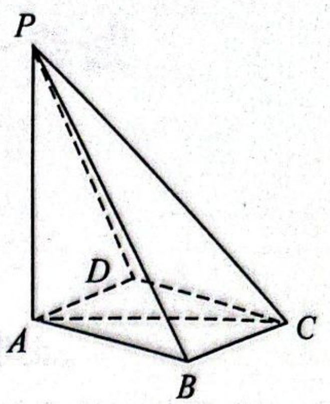
已知 $A(0,3)$ 和 $P\left(3,\dfrac{3}{2}\right)$ 为椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上两点.

(1)求 C 的离心率；

(2)若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B，且 $\triangle ABP$ 的面积为9，求 l 的方程.

17.（15 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$PA=AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$.



(1)若 $AD\perp PB$，证明：$AD/\!/$平面 PBC；

(2)若 $AD\perp DC$，且二面角 $A-CP-D$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{7}$，求 AD.

18.（17分）

已知函数$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

(1)若$b=0$，且$f'(x)\geqslant 0$，求a的最小值；

(2)证明：曲线$y=f(x)$是中心对称图形；

(3)若$f(x)>-2$当且仅当$1<x<2$，求b的取值范围.

19.（17 分）

设 m 为正整数，数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2}是公差不为 0 的等差数列，若从中删去两项 a_i 和 $a_j(i<j)$后剩余的 $4m$ 项可被平均分为 m 组，且每组的 4 个数都能构成等差数列，则称数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2}是$(i，j)$-可分数列.

(1)写出所有的$(i，j)$，$1\leqslant i<j\leqslant 6$，使得数列 a_1，a_2，…，a_6 是$(i，j)$-可分数列；

(2)当 $m\geqslant 3$ 时，证明：数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2}是(2，13)-可分数列；

(3)从 1，2，…，$4m+2$ 中一次任取两个数 i 和 $j(i<j)$，记数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2}是$(i，j)$-可分数列的概率为 P_m，证明：$P_m>\dfrac{1}{8}$.

2024年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅱ卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $z=-1-\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. 0　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$；命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$. 则

A. p 和 q 都是真命题　　B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题　　D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$，且 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{b}|=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. 1

4. 某农业研究部门在面积相等的100块稻田上种植一种新型水稻，得到各块稻田的亩产量(单位：kg)并整理得下表：

亩产量	[900, 950)	[950, 1 000)	[1 000, 1 050)	[1 050, 1 100)	[1 100, 1 150)	[1 150, 1 200)
频数	6	12	18	30	24	10

根据表中数据，下列结论中正确的是

A. 100块稻田亩产量的中位数小于1 050 kg

B. 100 块稻田中亩产量低于 1 100 kg 的稻田所占比例超过 80%

C. 100 块稻田亩产量的极差介于 200 kg 至 300 kg 之间

D. 100 块稻田亩产量的平均值介于 900 kg 至 1 000 kg 之间

5. 已知曲线 C：$x^2+y^2=16(y>0)$，从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线段 PP'，P' 为垂足，则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$　　B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$

C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$　　D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

6. 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$. 当 $x\in(-1, 1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点. 则 $a=$

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

7. 已知正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{52}{3}$，$AB=6$，$A_1B_1=2$，则 A_1A 与平面 ABC 所成角的正切值为

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. 2　　D. 3

8. 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$. 若 $f(x)\geqslant 0$，则 a^2+b^2 的最小值为

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 对于函数 $f(x)=\sin 2x$ 和 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，下列说法中正确的有

A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点

B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

10. 抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线为 l，P 为 C 上动点. 过 P 作⊙A：$x^2+(y-4)^2=1$ 的

一条切线，Q 为切点. 过 P 作 l 的垂线，垂足为 B. 则

A. l 与⊙A 相切

B. 当 P，A，B 三点共线时，$|PQ|=\sqrt{15}$

C. 当 $|PB|=2$ 时，$PA\perp AB$

D. 满足 $|PA|=|PB|$ 的点 P 有且仅有 2 个

11. 设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则

A. 当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点

B. 当 $a<0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. 存在 a，b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴

D. 存在 a，使得点 $(1,f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则 $S_{10}=$ ________.

13. 已知 α 为第一象限角，β 为第三象限角，$\tan\alpha+\tan\beta=4$，$\tan\alpha\tan\beta=\sqrt{2}+1$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$ ________.

14. 在右图的 4×4 的方格表中选 4 个方格，要求每行和每列均恰有一个方格被选中，则共有________种选法. 在所有符合上述要求的选法中，选中方格中的 4 个数之和的最大值是________.

11	21	31	40
12	22	33	42
13	22	33	43
15	24	34	44

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\sin A+\sqrt{3}\cos A=2$.

(1)求 A;

(2)若 $a=2$，$\sqrt{2}b\sin C=c\sin 2B$，求△ABC 的周长.

16.（15分）

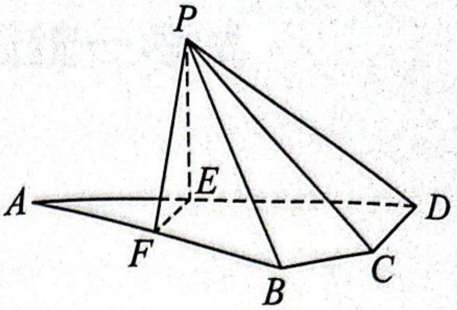
已知函数 $f(x)=e^{x}-ax-a^{3}$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)$ 有极小值，且极小值小于0，求 a 的取值范围.

17.（15分）

如图，平面四边形 $ABCD$ 中，$AB=8$，$CD=3$，$AD=5\sqrt{3}$，$\angle ADC=90^\circ$，$\angle BAD=30^\circ$，点 E，F 满足 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 将$\triangle AEF$沿 EF 翻折至$\triangle PEF$，使得 $PC=4\sqrt{3}$.



(1)证明：$EF\perp PD$；

(2)求面 PCD 与面 PBF 所成的二面角的正弦值.

18.（17 分）

某投篮比赛分为两个阶段，每个参赛队由两名队员组成. 比赛具体规则如下：第一阶段由参赛队中一名队员投篮 3 次，若 3 次都未投中，则该队被淘汰，比赛成绩为 0 分；若至少投中 1 次，则该队进入第二阶段. 第二阶段由该队的另一名队员投篮 3 次，每次投篮投中得 5 分，未投中得 0 分，该队的比赛成绩为第二阶段的得分总和.

某参赛队由甲、乙两名队员组成，设甲每次投中的概率为 p，乙每次投中的概率为 q，各次投中与否相互独立.

(1) 若 $p=0.4$，$q=0.5$，甲参加第一阶段比赛，求甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率；

(2) 假设 $0<p<q$.

(i) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

(ii) 为使得甲、乙所在队的比赛成绩的数学期望最大，应该由谁参加第一阶段比赛？

19.（17 分）

已知双曲线 C：$x^2-y^2=m(m>0)$，点 $P_1(5,4)$在 C 上，k 为常数，$0<k<1$. 按照如下方式依次构造点 $P_n(n=2,3,\cdots)$：过 P_{n-1}作斜率为 k 的直线与 C 的左支交于点 Q_{n-1}，令 P_n 为 Q_{n-1}关于 y 轴的对称点. 记 P_n 的坐标为(x_n, y_n).

(1) 若 $k=\frac{1}{2}$，求 x_2，y_2；

(2) 证明：数列$\{x_n-y_n\}$是公比为$\frac{1+k}{1-k}$的等比数列；

(3) 设 S_n 为$\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积. 证明：对任意正整数 n，$S_n=S_{n+1}$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷（理科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\mathbf{Z}$，集合 $M=\{x \mid x=3k+1, k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x \mid x=3k+2, k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U(M\cup N)=$

A. $\{x \mid x=3k, k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{x \mid x=3k-1, k\in\mathbf{Z}\}$

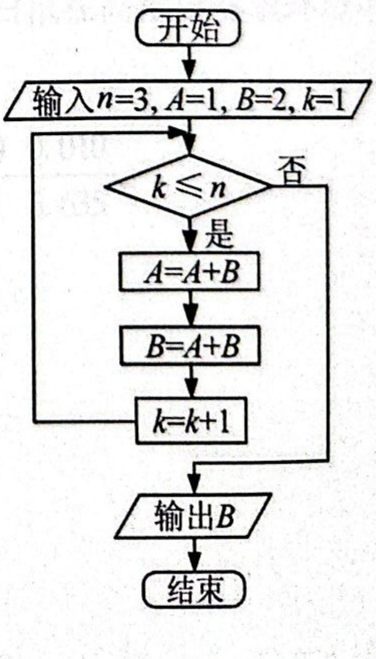
C. $\{x \mid x=3k-2, k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\varnothing$

2. 设 $a\in\mathbf{R}$，$(a+\mathrm{i})(1-a\mathrm{i})=2$，则 $a=$

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

3. 执行右边的程序框图，则输出的 $B=$



A. 21　　B. 34

C. 55　　D. 89

4. 已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=0$，则 $\cos\langle\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\rangle=$

A. $-\dfrac{4}{5}$　　B. $-\dfrac{2}{5}$

C. $\dfrac{2}{5}$　　D. $\dfrac{4}{5}$

5. 设等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$S_5=5S_3-4$，则 $S_4=$

A. $\frac{15}{8}$　　B. $\frac{65}{8}$　　C. 15　　D. 40

6. 某地的中学生中有 60%的同学爱好滑冰，50%的同学爱好滑雪，70%的同学爱好滑冰或爱好滑雪. 在该地的中学生中随机调查一位同学，若该同学爱好滑雪，则该同学也爱好滑冰的概率为

A. 0.8　　B. 0.6　　C. 0.5　　D. 0.4

7. 设甲：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，乙：$\sin\alpha+\cos\beta=0$，则

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，$C$ 的一条渐近线与圆$(x-2)^2+(y-3)^2=1$交于 A，B 两点，则$|AB|=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

9. 现有 5 名志愿者报名参加公益活动，在某一星期的星期六、星期日两天，每天从这 5 人中安排 2 人参加公益活动，则恰有 1 人在这两天都参加的不同安排方式共有

A. 120 种　　B. 60 种　　C. 30 种　　D. 20 种

10. 函数 $y=f(x)$的图象由函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得到，则 $y=f(x)$的图象与直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$的交点个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

11. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是边长为 4 的正方形，$PC=PD=3$，$\angle PCA=45°$，则$\triangle PBC$ 面积为

A. $2\sqrt{2}$　　B. $3\sqrt{2}$　　C. $4\sqrt{2}$　　D. $6\sqrt{2}$

12. 设 O 为坐标原点，F_1，F_2 为椭圆 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$ 的两个焦点，点 P 在 C 上，$\cos\angle F_1PF_2=\frac{3}{5}$，则 $|OP|=$

A. $\frac{13}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{30}}{2}$　　C. $\frac{14}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{35}}{2}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$__________.

14. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-2y\leqslant 3,\\-2x+3y\leqslant 3,\\x+y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为__________.

15. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别为 AB，C_1D_1 的中点. 以 EF 为直径的球的球面与该正方体的棱共有__________个公共点.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=60°$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，$\angle BAC$ 的角平分线交 BC 于 D，则 $AD=$__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

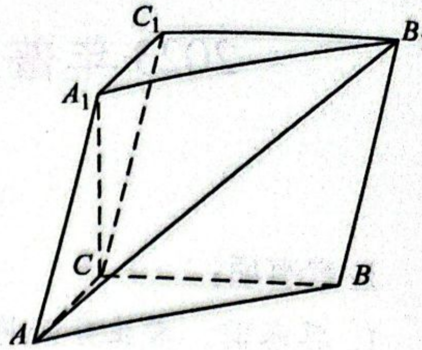
记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $a_2=1$，$2S_n=na_n$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)求数列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (12 分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1C\perp$ 平面 ABC，$\angle ACB=90°$，$AA_1=2$，A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.



(1) 证明：$A_1C=AC$；

(2) 已知 AA_1 与 BB_1 的距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.

19. (12分)

一项试验旨在研究臭氧效应，试验方案如下：选 40 只小白鼠，随机地将其中 20 只分配到试验组，另外 20 只分配到对照组，试验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境，对照组的小白鼠饲养在正常环境，一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量(单位：g).

(1)设 X 表示指定的两只小白鼠中分配到对照组的只数，求 X 的分布列和数学期望；

(2)试验结果如下：

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

15.2　18.8　20.2　21.3　22.5　23.2　25.8　26.5　27.5　30.1

32.6　34.3　34.8　35.6　35.6　35.8　36.2　37.3　40.5　43.2

试验组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

7.8　9.2　11.4　12.4　13.2　15.5　16.5　18.0　18.8　19.2

19.8　20.2　21.6　22.8　23.6　23.9　25.1　28.2　32.3　36.5

(ⅰ)求 40 只小白鼠体重的增加量的中位数 m，再分别统计两样本中小于 m 与不小于 m 的数据的个数，完成如下列联表：

	$<m$	$\geqslant m$
对照组		
试验组		

(ⅱ)根据(ⅰ)中的列联表，能否有 95%的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

20.（12分）

已知直线 $x-2y+1=0$ 与抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 交于 A，B 两点，$|AB|=4\sqrt{15}$.

(1)求 p；

(2)设 F 为 C 的焦点，M，N 为 C 上两点，且 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，求 $\triangle MFN$ 面积的最小值.

21.（12分）

已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$，$x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(1)当 $a=8$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若 $f(x)<\sin 2x$，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. ［选修 4-4：坐标系与参数方程］(10 分)

已知点 $P(2,1)$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），α 为 l 的倾斜角，l 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴分别交于点 A，B，且 $|PA|\cdot|PB|=4$.

(1) 求 α；

(2) 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 l 的极坐标方程.

23. [选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

设 $a>0$，函数 $f(x)=2|x-a|-a$.

(1) 求不等式 $f(x)<x$ 的解集；

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积为 2，求 a.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

全国乙卷（理科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 $z=\dfrac{2+i}{1+i^2+i^5}$，则 $\overline{z}=$

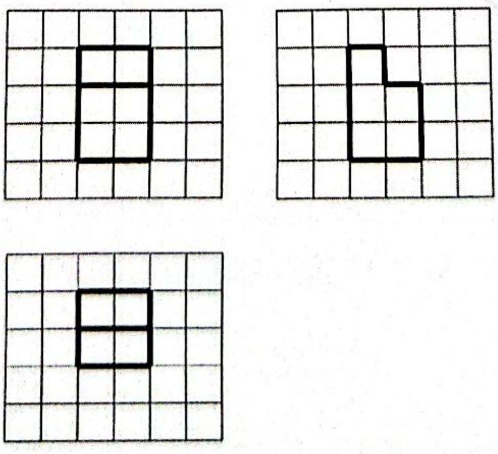
A. 1−2i　　B. 1+2i　　C. 2−i　　D. 2+i

2. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\mid x<1\}$，$N=\{x\mid -1<x<2\}$，则 $\{x\mid x\geqslant 2\}=$

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup\complement_U M$　　C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup\complement_U N$

3. 如图，网格纸上绘制的是一个零件的三视图，网格小正方形的边长为 1，则该零件的表面积为

A. 24　　B. 26　　C. 28　　D. 30



4. 已知$f(x)=\dfrac{xe^{x}}{e^{ax}-1}$是偶函数，则 $a=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5. 设 O 为平面直角坐标系的坐标原点，在区域$\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$内随机取一点，记该点为 A，则直线 OA 的倾斜角不大于$\dfrac{\pi}{4}$的概率为

A. $\dfrac{1}{8}$　　B. $\dfrac{1}{6}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

6. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$在区间$\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$单调递增，直线 $x=\dfrac{\pi}{6}$和 $x=\dfrac{2\pi}{3}$为函数 $y=f(x)$的图象的两条对称轴，则$f\left(-\dfrac{5\pi}{12}\right)=$

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

7. 甲、乙两位同学从 6 种课外读物中各自选读 2 种，则这两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有

A. 30 种　　B. 60 种　　C. 120 种　　D. 240 种

8. 已知圆锥 PO 的底面半径为$\sqrt{3}$，O 为底面圆心，PA，PB 为圆锥的母线，$\angle AOB=120^\circ$，若$\triangle PAB$ 的面积等于$\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$，则该圆锥的体积为

A. π　　B. $\sqrt{6}\pi$　　C. 3π　　D. $3\sqrt{6}\pi$

9. 已知$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，AB 为斜边，$\triangle ABD$ 为等边三角形. 若二面角 $C-AB-D$ 为 150°，则直线 CD 与平面 ABC 所成角的正切值为

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$　　D. $\dfrac{2}{5}$

10. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$\dfrac{2\pi}{3}$，集合 $S=\{\cos a_n\mid n\in\mathbf{N}^*\}$. 若$S=\{a,\ b\}$，则 $ab=$

A. -1　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. 0　　D. $\dfrac{1}{2}$

11. 设 A，B 为双曲线 $x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$ 上两点，下列四个点中，可以为线段 AB 中点

的是

A. (1, 1)　　B. (−1, 2)　　C. (1, 3)　　D. (−1, −4)

12. 已知⊙O的半径为1，直线PA与⊙O相切于点A，直线PB与⊙O交于B，C两点，D为BC的中点. 若$|PO|=\sqrt{2}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$的最大值为

A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$　　C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知点$A(1,\sqrt{5})$在抛物线C：$y^2=2px$上，则A到C的准线的距离为__________.

14. 若x，y满足约束条件$\begin{cases}x-3y\leqslant -1,\\ x+2y\leqslant 9,\\ 3x+y\geqslant 7,\end{cases}$则$z=2x-y$的最大值为__________.

15. 已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_2a_4a_5=a_3a_6$，$a_9a_{10}=-8$，则$a_7=$__________.

16. 设$a\in(0,1)$，若函数$f(x)=a^x+(1+a)^x$在$(0,+\infty)$单调递增，则a的取值范围是__________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（12分）

某厂为比较甲、乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，进行10次配对试验，每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品，随机地选其中一个用甲工艺处理，另一个用乙工艺处理，测量处理后的橡胶产品的伸缩率. 甲、乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别记为x_i，$y_i(i=1,2,\cdots,10)$. 试验结果如下：

试验序号i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
伸缩率x_i	545	533	551	522	575	544	541	568	596	548
伸缩率y_i	536	527	543	530	560	533	522	550	576	536

记$z_i=x_i-y_i(i=1,2,\cdots,10)$，记$z_1$，$z_2$，…，$z_{10}$的样本平均数为$\bar{z}$，样本方差为$s^2$.

(1)求 $\bar{z}$，s^2；

(2)判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高（如果 $\bar{z} \geqslant 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$，则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高，否则不认为有显著提高）.

18.（12分）

在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$.

(1)求$\sin\angle ABC$；

(2)若D为BC上一点，且$\angle BAD=90°$，求$\triangle ADC$的面积.

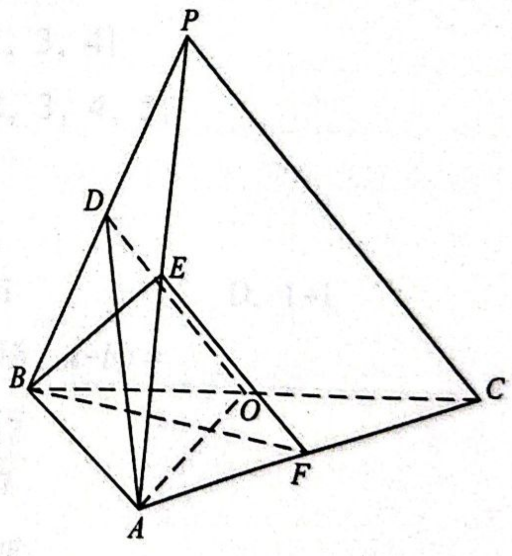
19.（12分）

如图，在三棱锥$P-ABC$中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC的中点分别为D，E，O，$AD=\sqrt{5}DO$，点F在AC上，$BF\perp AO$.

(1)证明：$EF//$平面ADO；

(2)证明：平面$ADO\perp$平面BEF；

(3)求二面角$D-AO-C$的正弦值.



20. (12分)

已知椭圆 C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，点$A(-2,0)$在 C 上.

(1)求 C 的方程；

(2)过点$(-2,3)$的直线交 C 于 P，Q 两点，直线 AP，AQ 与 y 轴的交点分别为 M，N，证明：线段 MN 的中点为定点.

21. (12分)

已知函数$f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$.

(1)当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)是否存在 a，b，使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$关于直线 $x=b$ 对称？若存在，求 a，b；若不存在，说明理由；

(3)若$f(x)$在$(0,+\infty)$存在极值点，求 a 的取值范围.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.［选修 4-4：坐标系与参数方程］(10 分)

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. 曲线 C_2：$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$）.

(1) 写出 C_1 的直角坐标方程；

(2) 若直线 $y=x+m$ 既与 C_1 没有公共点，也与 C_2 没有公共点，求 m 的取值范围.

23. [选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

已知 $f(x)=2|x|+|x-2|$.

（1）求不等式 $f(x)\leqslant 6-x$ 的解集；

（2）在直角坐标系 xOy 中，求不等式组 $\begin{cases} f(x)\leqslant y, \\ x+y-6\leqslant 0 \end{cases}$ 所确定的平面区域的面积.

2023年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷（文科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，集合 $M=\{1, 4\}$，$N=\{2, 5\}$，则 $N\cup \complement_U M=$

A. $\{2, 3, 5\}$　　B. $\{1, 3, 4\}$

C. $\{1, 2, 4, 5\}$　　D. $\{2, 3, 4, 5\}$

2. $\dfrac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)}=$

A. -1　　B. 1　　C. $1-i$　　D. $1+i$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3, 1)$，$\boldsymbol{b}=(2, 2)$，则 $\cos\langle \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=$

A. $\dfrac{1}{17}$　　B. $\dfrac{\sqrt{17}}{17}$

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

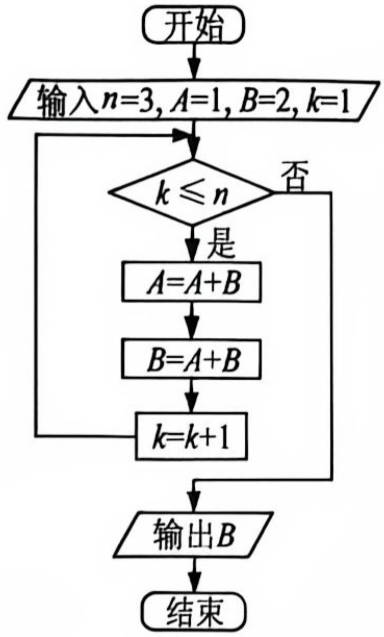
4. 某校文艺部有4名学生，其中高一、高二年级各2名. 从这4名学生中随机选2名组织校文艺汇演，则这2名学生来自不同年级的概率为

A. $\dfrac{1}{6}$　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

5. 记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $a_2+a_6=10$，$a_4a_8=45$，则 $S_5=$

A. 25　　B. 22　　C. 20　　D. 15

6. 执行右边的程序框图，则输出的 $B=$



A. 21

B. 34

C. 55

D. 89

7. 设 F_1，F_2 为椭圆 C：$\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的两个焦点，点 P 在 C 上，若$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$，则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 5

8. 曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$在点$\left(1,\ \frac{e}{2}\right)$处的切线方程为

A. $y=\frac{e}{4}x$　　B. $y=\frac{e}{2}x$

C. $y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$　　D. $y=\frac{e}{2}x+\frac{3e}{4}$

9. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，$C$ 的一条渐近线与圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 交于 A，B 两点，则 $|AB|=$

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

10. 在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$PA=PB=2$，$PC=\sqrt{6}$，则该棱锥的体积为

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. 3

11. 已知函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$. 记 $a=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$b=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$c=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，则

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$　　C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

12. 函数 $y=f(x)$ 的图象由函数 $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度得

到，则 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ 的交点个数为

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $8S_6=7S_3$，则 $\{a_n\}$ 的公比为__________.

14. 若 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ 为偶函数，则 $a=$__________.

15. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}3x-2y\leqslant 3,\\-2x+3y\leqslant 3,\\x+y\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=3x+2y$ 的最大值为__________.

16. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，O 为 AC_1 的中点，若该正方体的棱与球 O 的球面有公共点，则球 O 的半径的取值范围是__________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

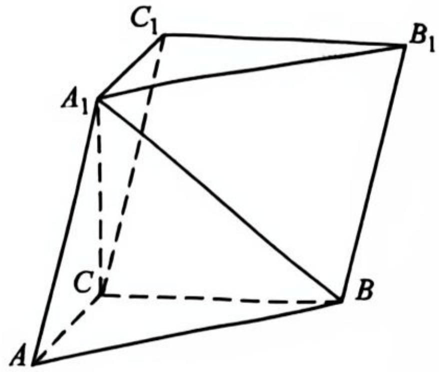
记△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $\frac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2$.

(1) 求 bc；

(2) 若 $\frac{a\cos B-b\cos A}{a\cos B+b\cos A}-\frac{b}{c}=1$，求△$ABC$ 面积.

18. (12分)

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$A_1C\perp$ 平面 ABC，$\angle ACB=90°$.



(1)证明：平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BB_1C_1C；

(2)设 $AB=A_1B$，$AA_1=2$，求四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高.

19. (12 分)

一项试验旨在研究臭氧效应，试验方案如下：选 40 只小白鼠，随机地将其中 20 只分配到试验组，另外 20 只分配到对照组，试验组的小白鼠饲养在高浓度臭氧环境，对照组的小白鼠饲养在正常环境，一段时间后统计每只小白鼠体重的增加量(单位：g)．试验结果如下：

对照组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

15.2　18.8　20.2　21.3　22.5　23.2　25.8　26.5　27.5　30.1

32.6　34.3　34.8　35.6　35.6　35.8　36.2　37.3　40.5　43.2

试验组的小白鼠体重的增加量从小到大排序为

7.8　9.2　11.4　12.4　13.2　15.5　16.5　18.0　18.8　19.2

19.8　20.2　21.6　22.8　23.6　23.9　25.1　28.2　32.3　36.5

(1)计算试验组的样本平均数；

(2)(ⅰ)求 40 只小白鼠体重的增加量的中位数 m，再分别统计两样本中小于 m 与不小于 m 的数据的个数，完成如下列联表：

	$<m$	$\geqslant m$
对照组		
试验组		

(ⅱ)根据(ⅰ)中的列联表，能否有 95%的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，

$P(K^2\geqslant k)$	0.100	0.050	0.010
k	2.706	3.841	6.635

20.（12分）

已知函数$f(x)=ax-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$，$x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

(1)当$a=1$时，讨论$f(x)$的单调性；

(2)若$f(x)+\sin x<0$，求a的取值范围.

21.（12分）

已知直线$x-2y+1=0$与抛物线C：$y^2=2px(p>0)$交于A，B两点，$|AB|=4\sqrt{15}$.

(1)求p；

(2)设F为C的焦点，M，N为C上两点，且$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$，求$\triangle MFN$面积的最小值.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. ［选修 4-4：坐标系与参数方程］(10 分)

已知点 $P(2,1)$，直线 l：$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha,\\ y=1+t\sin\alpha\end{cases}$（$t$ 为参数），α 为 l 的倾斜角，l 与 x 轴正半轴、y 轴正半轴分别交于点 A，B，且 $|PA|\cdot|PB|=4$.

(1) 求 α；

(2) 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 l 的极坐标方程.

23. [选修 4-5：不等式选讲](10 分)

设 $a>0$，函数 $f(x)=2|x-a|-a$.

(1)求不等式 $f(x)<x$ 的解集；

(2)若曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积为 2，求 a.

2023年普通高等学校招生全国统一考试

全国乙卷（文科）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. $|2+i^2+2i^3|=$

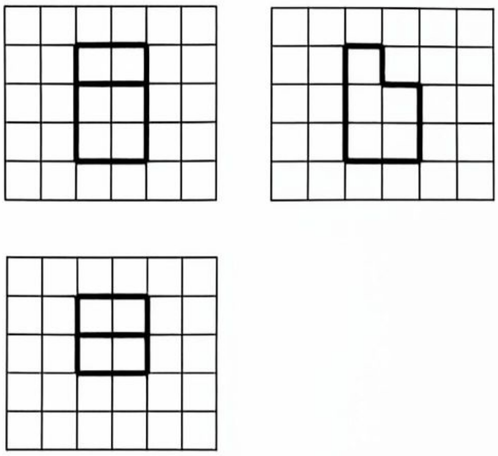
A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{5}$　　D. 5

2. 设全集 $U=\{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$，集合 $M=\{0, 4, 6\}$，$N=\{0, 1, 6\}$，则$M\cup \complement_U N=$

A. $\{0, 2, 4, 6, 8\}$　　B. $\{0, 1, 4, 6, 8\}$

C. $\{1, 2, 4, 6, 8\}$　　D. U

3. 如图，网格纸上绘制的是一个零件的三视图，网格小正方形的边长为1，则该零件的表面积为



A. 24

B. 26

C. 28

D. 30

4. 记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，若$a\cos B-b\cos A=c$，且$C=\dfrac{\pi}{5}$，则$B=$

A. $\frac{\pi}{10}$　　B. $\frac{\pi}{5}$　　C. $\frac{3\pi}{10}$　　D. $\frac{2\pi}{5}$

5. 已知$f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$是偶函数，则 $a=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

6. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，E 为 AB 的中点，则$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=$

A. $\sqrt{5}$　　B. 3　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 5

7. 设 O 为平面直角坐标系的坐标原点，在区域$\{(x, y) \mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$内随机取一点，记该点为 A，则直线 OA 的倾斜角不大于$\frac{\pi}{4}$的概率为

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{6}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

8. 若函数$f(x)=x^3+ax+2$存在 3 个零点，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty, -2)$　　B. $(-\infty, -3)$

C. $(-4, -1)$　　D. $(-3, 0)$

9. 某学校举办作文比赛，共设 6 个主题，每位参赛同学从中随机抽取一个主题准备作文. 则甲、乙两位参赛同学抽到不同主题的概率为

A. $\frac{5}{6}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

10. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$在区间$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$单调递增，直线$x=\frac{\pi}{6}$和$x=\frac{2\pi}{3}$为函数$y=f(x)$的图象的两条对称轴，则$f\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知 x，y 满足$x^2+y^2-4x-2y-4=0$，则 $x-y$ 的最大值是

A. $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. 4

C. $1+3\sqrt{2}$　　D. 7

12. 设 A，B 为双曲线$x^2-\frac{y^2}{9}=1$上两点，下列四个点中，可以为线段 AB 中点的是

A. (1, 1)　　B. (−1, 2)

C. (1, 3)　　D. (−1, −4)

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知点 $A(1,\sqrt{5})$ 在抛物线 C：$y^2=2px$ 上，则 A 到 C 的准线的距离为 ________.

14. 若 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\theta-\cos\theta=$ ________.

15. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x-3y\leqslant-1,\\x+2y\leqslant9,\\3x+y\geqslant7,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为 ________.

16. 已知点 S，A，B，C 均在半径为 2 的球面上，$\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，$SA\perp$ 平面 ABC，则 $SA=$ ________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17. (12 分)

某厂为比较甲、乙两种工艺对橡胶产品伸缩率的处理效应，进行 10 次配对试验，每次配对试验选用材质相同的两个橡胶产品，随机地选其中一个用甲工艺处理，另一个用乙工艺处理，测量处理后的橡胶产品的伸缩率. 甲、乙两种工艺处理后的橡胶产品的伸缩率分别记为 x_i，$y_i(i=1,2,\cdots,10)$. 试验结果如下：

试验序号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
伸缩率 x_i	545	533	551	522	575	544	541	568	596	548
伸缩率 y_i	536	527	543	530	560	533	522	550	576	536

记 $z_i=x_i-y_i(i=1,2,\cdots,10)$，记 z_1，z_2，$\cdots$，z_{10} 的样本平均数为 $\bar{z}$，样本方差为 s^2.

(1) 求 $\bar{z}$，s^2；

(2)判断甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率是否有显著提高(如果 $\bar{z} \geqslant 2\sqrt{\frac{s^2}{10}}$，则认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高，否则不认为有显著提高).

18.（12 分）

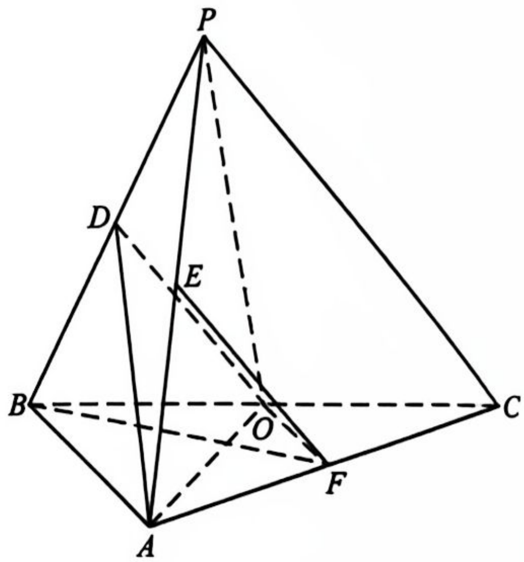
记 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和. 已知 $a_2=11$，$S_{10}=40$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{|a_n|\}$的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$AB\perp BC$，$AB=2$，$BC=2\sqrt{2}$，$PB=PC=\sqrt{6}$，BP，AP，BC 的中点分别为 D，E，O，点 F 在 AC 上，$BF\perp AO$.



(1)证明：$EF /\!/$ 平面 ADO；

(2)若 $\angle POF=120°$，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积.

20.（12分）

已知函数$f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$.

(1)当$a=-1$时，求曲线$y=f(x)$在点$(1,\ f(1))$处的切线方程；

(2)若$f(x)$在$(0,\ +\infty)$单调递增，求a的取值范围.

21.（12分）

已知椭圆C：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{5}}{3}$，点$A(-2,\ 0)$在$C$上.

(1)求C的方程；

(2)过点$(-2,\ 3)$的直线交C于P，Q两点，直线AP，AQ与y轴的交点分别为M，N，证明：线段MN的中点为定点.

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22. ［选修 4-4：坐标系与参数方程］(10 分)

在直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$. 曲线 C_2：$\begin{cases}x=2\cos\alpha,\\y=2\sin\alpha\end{cases}\left(\alpha\text{ 为参数，}\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$.

(1)写出 C_1 的直角坐标方程；

(2)若直线 $y=x+m$ 既与 C_1 没有公共点，也与 C_2 没有公共点，求 m 的取值范围.

23. [选修4-5：不等式选讲]（10分）

已知$f(x)=2|x|+|x-2|$.

（1）求不等式$f(x)\leqslant 6-x$的解集；

（2）在直角坐标系xOy中，求不等式组$\begin{cases} f(x)\leqslant y, \\ x+y-6\leqslant 0 \end{cases}$所确定的平面区域的面积.

2023年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅰ卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

2. 已知 $z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$，则 $z-\overline{z}=$

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. 0　　D. 1

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$. 若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$，则

A. $\lambda+\mu=1$　　B. $\lambda+\mu=-1$　　C. $\lambda\mu=1$　　D. $\lambda\mu=-1$

4. 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$ 在区间 $(0,1)$ 单调递减，则 a 的取值范围是

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$

C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

5. 设椭圆 C_1：$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1\,(a>1)$，$C_2$：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 的离心率分别为 e_1，e_2. 若 $e_2=\sqrt{3}e_1$，则 $a=$

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{6}$

6. 过点(0，−2)与圆 $x^2+y^2-4x-1=0$ 相切的两条直线的夹角为 α，则 $\sin\alpha=$

A. 1　　　B. $\frac{\sqrt{15}}{4}$　　　C. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

7. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. 已知 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{6}$，则 $\cos(2\alpha+2\beta)=$

A. $\frac{7}{9}$　　　B. $\frac{1}{9}$　　　C. $-\frac{1}{9}$　　　D. $-\frac{7}{9}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 有一组样本数据 x_1，x_2，…，x_6，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则

A. x_2，x_3，x_4，x_5 的平均数等于 x_1，x_2，…，x_6 的平均数

B. x_2，x_3，x_4，x_5 的中位数等于 x_1，x_2，…，x_6 的中位数

C. x_2，x_3，x_4，x_5 的标准差不小于 x_1，x_2，…，x_6 的标准差

D. x_2，x_3，x_4，x_5 的极差不大于 x_1，x_2，…，x_6 的极差

10. 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱，定义声压级 $L_p=20\times\lg\frac{p}{p_0}$，其中常数 $p_0(p_0>0)$ 是听觉下限阈值，p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级：

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60~90
混合动力汽车	10	50~60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1，p_2，p_3，则

A. $p_1 \geqslant p_2$ B. $p_2 > 10p_3$

C. $p_3 = 100p_0$ D. $p_1 \leqslant 100p_2$

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy) = y^2f(x) + x^2f(y)$，则

A. $f(0) = 0$ B. $f(1) = 0$

C. $f(x)$ 是偶函数 D. $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

12. 下列物体中，能够被整体放入棱长为 1(单位：m)的正方体容器(容器壁厚度忽略不计)内的有

A. 直径为 0.99 m 的球体

B. 所有棱长均为 1.4 m 的四面体

C. 底面直径为 0.01 m，高为 1.8 m 的圆柱体

D. 底面直径为 1.2 m，高为 0.01 m 的圆柱体

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选修 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选修 1 门，则不同的选课方案共有__________种(用数字作答).

14. 在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$A_1B_1=1$，$AA_1=\sqrt{2}$，则该棱台的体积为__________.

15. 已知函数 $f(x)=\cos\omega x-1(\omega>0)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点，则 ω 的取值范围是__________.

16. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2. 点 A 在 C 上，点 B 在 y 轴上，$\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，$\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，则 C 的离心率为__________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

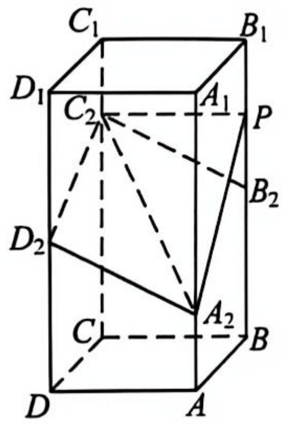
17. (10 分)

已知在 $\triangle ABC$ 中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

(1)求 $\sin A$；

(2)设 $AB=5$，求 AB 边上的高.

18.（12 分）



如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$AA_1=4$. 点 A_2，B_2，C_2，D_2 分别在棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 上，$AA_2=1$，$BB_2=DD_2=2$，$CC_2=3$.

(1)证明：$B_2C_2 /\!/ A_2D_2$；

(2)点 P 在棱 BB_1 上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 $150°$ 时，求 B_2P.

19.（12 分）

已知函数$f(x)=a(e^x+a)-x$.

(1)讨论$f(x)$的单调性；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

20.（12分）

设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，且$d>1$. 令$b_n=\frac{n^2+n}{a_n}$，记S_n，T_n分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和.

(1)若$3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$\{b_n\}$为等差数列，且$S_{99}-T_{99}=99$，求d.

21．（12 分）

甲、乙两人投篮，每次由其中一人投篮，规则如下：若命中则此人继续投篮，若未命中则换为对方投篮．无论之前投篮情况如何，甲每次投篮的命中率均为 0.6，乙每次投篮的命中率均为 0.8．由抽签确定第 1 次投篮的人选，第 1 次投篮的人是甲、乙的概率各为 0.5.

（1）求第 2 次投篮的人是乙的概率；

（2）求第 i 次投篮的人是甲的概率；

（3）已知：若随机变量 X_i 服从两点分布，且 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=q_i$，$i=1$，2，…，n，则 $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} q_i$．记前 n 次（即从第 1 次到第 n 次投篮）中甲投篮的次数为 Y，求 $E(Y)$.

22.（12 分）

在直角坐标系 xOy 中，点 P 到 x 轴的距离等于点 P 到点 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ 的距离，记动点 P 的轨迹为 W.

(1) 求 W 的方程；

(2) 已知矩形 $ABCD$ 有三个顶点在 W 上，证明：矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

2023年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅱ卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 在复平面内，$(1+3i)(3-i)$对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

2. 设集合$A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若$A\subseteq B$，则$a=$

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{2}{3}$　　D. -1

3. 某学校为了解学生参加体育运动的情况，用比例分配的分层随机抽样方法作抽样调查，拟从初中部和高中部两层共抽取60名学生，已知该校初中部和高中部分别有400名和200名学生，则不同的抽样结果共有

A. $C_{400}^{45}\cdot C_{200}^{15}$种　　B. $C_{400}^{20}\cdot C_{200}^{40}$种

C. $C_{400}^{30}\cdot C_{200}^{30}$种　　D. $C_{400}^{40}\cdot C_{200}^{20}$种

4. 若$f(x)=(x+a)\ln\frac{2x-1}{2x+1}$为偶函数，则$a=$

A. -1　　B. 0　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

5. 已知椭圆C：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$的左、右焦点分别为F_1，F_2，直线$y=x+m$与C交于

A，B 两点，若$\triangle F_1AB$ 面积是$\triangle F_2AB$ 面积的 2 倍，则 $m=$

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

6. 已知函数$f(x)=ae^x-\ln x$在区间(1，2)单调递增，则 a 的最小值为

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

7. 已知 α 为锐角，$\cos\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$，则 $\sin\frac{\alpha}{2}=$

A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$　　B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$　　C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$　　D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8. 记 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $S_4=-5$，$S_6=21S_2$，则 $S_8=$

A. 120　　B. 85　　C. −85　　D. −120

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知圆锥的顶点为 P，底面圆心为 O，AB 为底面直径，$\angle APB=120°$，$PA=2$，点 C 在底面圆周上，且二面角 $P\text{-}AC\text{-}O$ 为 45°，则

A. 该圆锥的体积为 π　　B. 该圆锥的侧面积为 $4\sqrt{3}\pi$

C. $AC=2\sqrt{2}$　　D. $\triangle PAC$ 的面积为$\sqrt{3}$

10. 设 O 为坐标原点，直线 $y=-\sqrt{3}(x-1)$过抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点，且与 C 交于 M，N 两点，l 为 C 的准线，则

A. $p=2$　　B. $|MN|=\frac{8}{3}$

C. 以 MN 为直径的圆与 l 相切　　D. $\triangle OMN$ 为等腰三角形

11. 若函数$f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq0)$既有极大值也有极小值，则

A. $bc>0$　　B. $ab>0$　　C. $b^2+8ac>0$　　D. $ac<0$

12. 在信道内传输 0，1 信号，信号的传输相互独立. 发送 0 时，收到 1 的概率为 $\alpha(0<\alpha<1)$，收到 0 的概率为 $1-\alpha$；发送 1 时，收到 0 的概率为 $\beta(0<\beta<1)$，收到 1 的概率为 $1-\beta$. 考虑两种传输方案：单次传输和三次传输. 单次传输是指每个信号只发送 1 次；三次传输是指每个信号重复发送 3 次. 收到的信号需要译码，译码规则

如下：单次传输时，收到的信号即为译码；三次传输时，收到的信号中出现次数多的即为译码(例如，若依次收到1，0，1，则译码为1).

A. 采用单次传输方案，若依次发送1，0，1，则依次收到1，0，1的概率为$(1-\alpha)(1-\beta)^2$

B. 采用三次传输方案，若发送1，则依次收到1，0，1的概率为$\beta(1-\beta)^2$

C. 采用三次传输方案，若发送1，则译码为1的概率为$\beta(1-\beta)^2+(1-\beta)^3$

D. 当$0<\alpha<0.5$时，若发送0，则采用三次传输方案译码为0的概率大于采用单次传输方案译码为0的概率

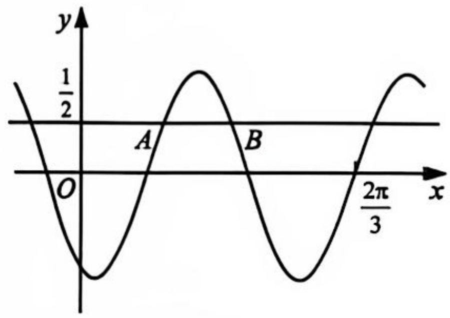
三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 已知向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，则$|\boldsymbol{b}|=$__________.

14. 底面边长为4的正四棱锥被平行于其底面的平面所截，截去一个底面边长为2，高为3的正四棱锥，所得棱台的体积为__________.

15. 已知直线$x-my+1=0$与$\odot C$：$(x-1)^2+y^2=4$交于A，B两点，写出满足"$\triangle ABC$面积为$\frac{8}{5}$"的m的一个值__________.

16. 已知函数$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$，如图，$A$，$B$是直线$y=\frac{1}{2}$与曲线$y=f(x)$的两个交点，若$|AB|=\frac{\pi}{6}$，则$f(\pi)=$__________.



四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\triangle ABC$面积为$\sqrt{3}$，D为BC的中点，且$AD=1$.

(1)若$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，求$\tan B$；

(2)若$b^2+c^2=8$，求b，c.

18.（12 分）

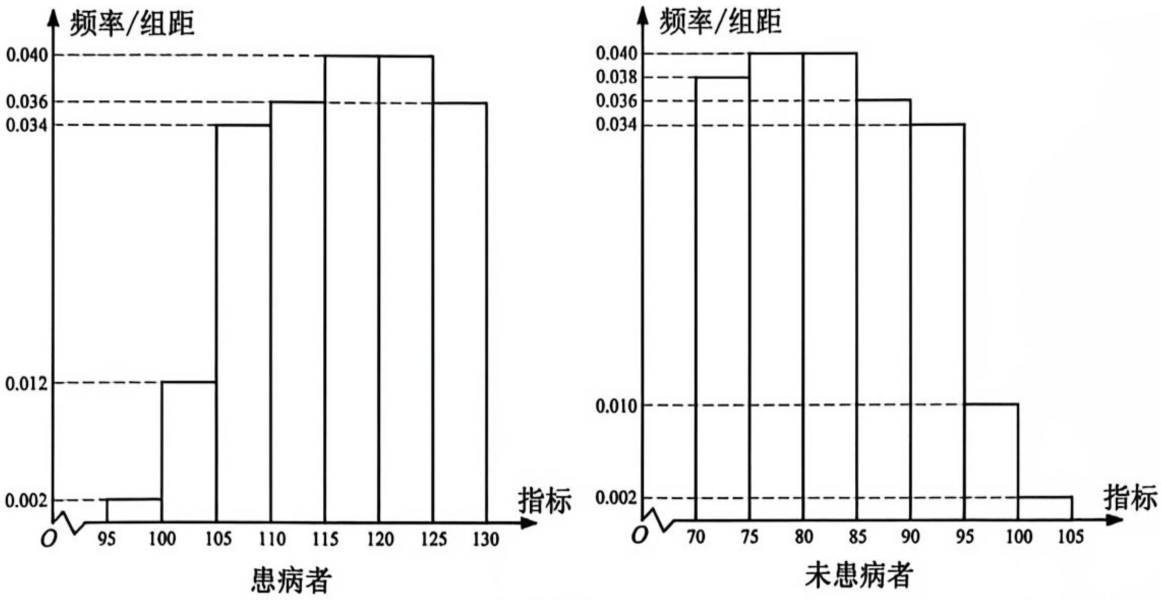
已知$\{a_n\}$为等差数列，$b_n=\begin{cases}a_n-6, & n\text{ 为奇数},\\ 2a_n, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$记$S_n$，$T_n$分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前$n$项和，$S_4=32$，$T_3=16$.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：当$n>5$时，$T_n>S_n$.

19.（12 分）

某研究小组经过研究发现某种疾病的患病者与未患病者的某项医学指标有明显差异，经过大量调查，得到如下的患病者和未患病者该指标的频率分布直方图：



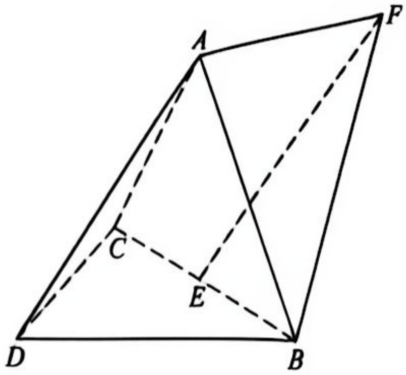
利用该指标制定一个检测标准，需要确定临界值 c，将该指标大于 c 的人判定为阳性，小于或等于 c 的人判定为阴性. 此检测标准的漏诊率是将患病者判定为阴性的概率，记为 $p(c)$；误诊率是将未患病者判定为阳性的概率，记为 $q(c)$. 假设数据在组内均匀分布. 以事件发生的频率作为相应事件发生的概率.

(1) 当漏诊率 $p(c)=0.5\%$时，求临界值 c 和误诊率 $q(c)$；

(2) 设函数 $f(c)=p(c)+q(c)$. 当 $c\in[95, 105]$时，求 $f(c)$ 的解析式，并求 $f(c)$ 在区间$[95, 105]$的最小值.

20.（12分）

如图，三棱锥 $A-BCD$ 中，$DA=DB=DC$，$BD\perp CD$，$\angle ADB=\angle ADC=60°$，$E$ 为 BC 的中点.



（1）证明：$BC\perp DA$；

（2）点 F 满足 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}$，求二面角 $D-AB-F$ 的正弦值.

21.（12 分）

已知双曲线 C 的中心为坐标原点，左焦点为$(-2\sqrt{5}, 0)$，离心率为$\sqrt{5}$.

(1)求 C 的方程；

(2)记 C 的左、右顶点分别为 A_1，A_2，过点$(-4, 0)$的直线与 C 的左支交于 M，N 两点，M 在第二象限，直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P，证明：点 P 在定直线上.

22.（12 分）

(1) 证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$；

(2) 已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.

参 考 答 案

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

全国一卷

一、选择题

1. C　　2. C　　3. D　　4. B　　5. A　　6. A　　7. B　　8. B

二、选择题

9. BD　　10. ACD　　11. ABC

三、填空题

12. 4　　13. 2　　14. $\frac{61}{25}$

四、解答题

15. 解：

(1) p 的估计值为$\frac{180}{200}=0.9$.

(2) 零假设为

H_0：超声波检查结果与患该疾病无关.

根据列联表中的数据，经计算得到

$$\chi^2=\frac{1000\times(20\times20-780\times180)^2}{200\times800\times800\times200}=765.625>10.828.$$

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为超声波检查结果与患该疾病有关.

16. 解：

(1)由已知得$(n+1)a_{n+1}-na_n=1$. 又 $a_1=3$，所以数列 $\{na_n\}$ 是首项为 3，公差为 1 的等差数列.

(2)由(1)可得 $na_n=n+2$，故

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+ma_mx^{m-1}=3+4x+\cdots+(m+2)x^{m-1}.$$

可得

$$f'(-2)=3+4\times(-2)+\cdots+(m+2)(-2)^{m-1},$$

$$-2f'(-2)=3\times(-2)+4\times(-2)^2+\cdots+(m+1)(-2)^{m-1}+(m+2)(-2)^m,$$

$$3f'(-2)=3+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{m-1}-(m+2)(-2)^m$$

$$=3+\frac{-2-(-2)^m}{3}-(m+2)(-2)^m,$$

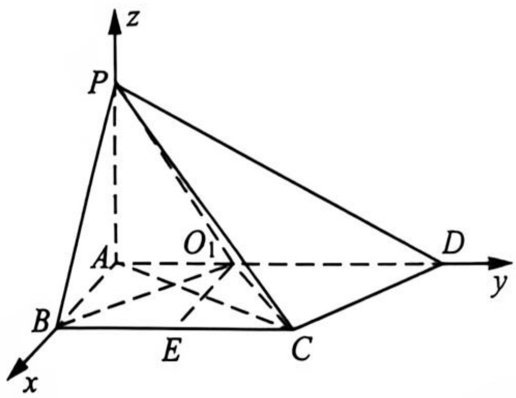
因此$f'(-2)=\frac{7}{9}-\frac{3m+7}{9}(-2)^m$.

17. 解：

(1)由已知，$PA\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，故$PA\perp AB$. 又$AB\perp AD$，$AD\cap PA=A$，$AD\subset$平面PAD、$PA\subset$平面PAD，故$AB\perp$平面PAD.

因为$AB\subset$平面PAB，所以平面$PAB\perp$平面PAD.

(2)(ⅰ)在平面$ABCD$内作线段BC的垂直平分线分别交AD，BC于点O_1，E. 连结BO_1，CO_1，PO_1，则由题意知四边形$ABEO_1$为矩形，且$AO_1=BE=EC=1$，$CO_1=BO_1=\sqrt{AB^2+AO_1^2}=\sqrt{3}$，$DO_1=\sqrt{3}$，$PO_1=\sqrt{PA^2+AO_1^2}=\sqrt{3}$，所以$O_1$为$P$，$B$，$C$，$D$四点确定的球$O$的球心，即$O_1$为点$O$，故点$O$在平面$ABCD$内.



(ⅱ)以A为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$的方向为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$A-xyz$. 由已知可得$C(\sqrt{2}, 2, 0)$，$O(0, 1, 0)$，$P(0, 0, \sqrt{2})$，$\overrightarrow{PO}=(0, 1, -\sqrt{2})$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2}, 2, 0)$，$\cos\langle\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{PO}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

所以直线AC与PO所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{3}$.

18. 解：

(1)由题意得$a^2+b^2=10$，$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，解得$a=3$，$b=1$，故$C$的方程为$\frac{x^2}{9}+y^2=1$.

(2)(ⅰ)由(1)知$A(0, -1)$，故$\overrightarrow{AP}=(m, n+1)(m\neq 0)$，可设$\overrightarrow{AR}=(\lambda m, \lambda(n+1))(\lambda>0)$，由$|AP|\cdot|AR|=3$得

$$\lambda\sqrt{m^2+(n+1)^2}\cdot\sqrt{m^2+(n+1)^2}=3,$$

故$\lambda=\frac{3}{m^2+(n+1)^2}$，因此$R\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1\right)$.

(ⅱ)由(ⅰ)知直线OR的斜率为$\frac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m}$，由题意得

$$\frac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m}=3\cdot\frac{n}{m},$$

故$m^2+n^2+8n-2=0$，即$m^2+(n+4)^2=18$.

因此 P 在以 $T(0,\ -4)$ 为圆心，$3\sqrt{2}$ 为半径的圆上.

设 $Q(u,\ v)$，则 $|QT|^2=u^2+(v+4)^2=9(1-v^2)+(v+4)^2=-8\left(v-\frac{1}{2}\right)^2+27\leqslant 27$，因此 $|PQ|\leqslant |QT|+|PT|\leqslant 3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$，当 $P\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -4-\frac{3\sqrt{6}}{2}\right)$，$Q\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$时等号成立，且直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍.

因此 $|PQ|$ 的最大值为 $3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

19. 解：

(1) $f'(x)=5(\sin 5x-\sin x)$.

当 $0<x<\frac{\pi}{6}$时，$x<5x<\pi-x$，故 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间$\left(0,\ \frac{\pi}{6}\right)$单调递增；当$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{4}$时，$\frac{\pi}{2}<\pi-x<5x<\frac{3}{2}\pi$，故 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间$\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4}\right)$单调递减.

因此 $f(x)$ 在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$的最大值为$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$.

(2) 因为余弦函数以 2π 为周期，所以不妨设 $a\in[0,\ 2\pi)$.

若 $0\leqslant a\leqslant \pi-\theta$，则取 $\gamma=a+\theta$，有 $\cos\gamma=\cos(a+\theta)\leqslant\cos\theta$；

若 $\pi-\theta<a<\pi+\theta$，则取 $\gamma=\pi$，有 $\cos\gamma=-1<\cos\theta$；

若 $\pi+\theta\leqslant a<2\pi$，则取 $\gamma=a-\theta$，有 $\cos\gamma=\cos(a-\theta)<\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$.

综上，给定 $\theta\in(0,\ \pi)$ 和 $a\in\mathbf{R}$，存在 $\gamma\in[a-\theta,\ a+\theta]$ 使得$\cos\gamma\leqslant\cos\theta$.

(3) 由(1)知当 $x\in\left[0,\ \frac{\pi}{4}\right]$时 $f(x)\leqslant 3\sqrt{3}$. 当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\ \pi\right]$时，$f(x)<5\cos\frac{\pi}{4}-(-1)<3\sqrt{3}$. 又 $f(x)$ 是周期为 2π 的偶函数，故 $f(x)\leqslant 3\sqrt{3}$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立. 所以当 $b\geqslant 3\sqrt{3}$ 时，存在 $\varphi=0$ 使得 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$ 对$x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

当 $b<3\sqrt{3}$时，令 $\theta=\frac{5\pi}{6}$，由(2)知对任意 φ，存在 $\gamma\in\left[\varphi-\frac{5\pi}{6},\ \varphi+\frac{5\pi}{6}\right]$使得

$$\cos\gamma\leqslant\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

令 $x=\frac{\gamma-\varphi}{5}$，则 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6}\right]$，故

$$5\cos x-\cos(5x+\varphi)=5\cos x-\cos\gamma\geqslant 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3\sqrt{3}>b.$$

因此 $b<3\sqrt{3}$时均不符合题意.

综上，b 的最小值是 $3\sqrt{3}$.

参 考 答 案

2025 年普通高等学校招生全国统一考试

全国二卷

一、选择题

1. C　2. A　3. D　4. C　5. A　6. C　7. B　8. D

二、选择题

9. AD　10. ABD　11. ACD

三、填空题

12. $\sqrt{2}$　13. -4　14. $\frac{5}{2}$

四、解答题

15. 解：

(1)由题设可知函数 $f(x)$ 的图象经过点 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$，结合特殊角的余弦值可得到 $f(x)$ 的相位 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2)基于题设和(1)的结论便可得到函数 $g(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x$，再利用两角和的余弦公式便可化简得到 $g(x)=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)$. 由 $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$ 便知 $g(x)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}\cos 2x-\sin\frac{\pi}{6}\sin 2x\right)$，再由两角和的余弦公式即知 $g(x)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$. 由于余弦函数 $y=\cos x$ 的值域是 $[-1, 1]$，因此 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. 因为 $g(x)=\sqrt{3}\cos 2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$，所以 $g(x)$ 的图象可由函数 $y=\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到. 又函数 $y=\sqrt{3}\cos 2x$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递减，在区间 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递增，而函数 $y=\sqrt{3}\cos 2x$ 和 $g(x)$ 的最小正周期都是 π，

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left(k\pi-\frac{\pi}{12},\ k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)$，单调递增区间为 $\left(k\pi+\frac{5\pi}{12},\ k\pi+\frac{11\pi}{12}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$.

16. 解：

(1) 由题设知 $a=2$，$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $b^2=2$. 所以 C 的方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1.$$

(2) 由题意可设 l：$y=kx-2$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{2}|x_1-x_2|\sqrt{1+k^2}\times\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}=|x_1-x_2|$. 由题设知 $|x_1-x_2|=\sqrt{2}$.

由 $\begin{cases}y=kx-2,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2-8kx+4=0$. 则

$$x_1+x_2=\frac{8k}{1+2k^2},\ x_1x_2=\frac{4}{1+2k^2}.$$

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\frac{32k^2-16}{(1+2k^2)^2}.$$

所以 $\frac{32k^2-16}{(1+2k^2)^2}=2$，解得 $k^2=\frac{3}{2}$.

因此 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{5}$.

17. 解：

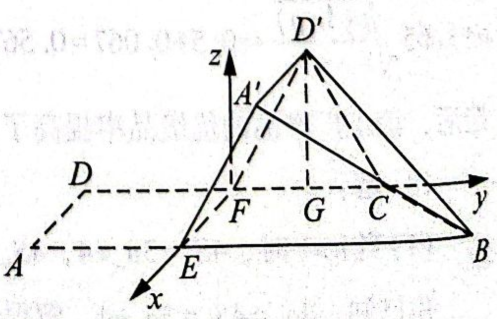
(1) 由已知可得 $BE\parallel CF$，$BE\not\subset$ 平面 $CD'F$，$CF\subset$ 平面 $CD'F$，所以 $BE\parallel$ 平面 $CD'F$. 同理可得 $A'E\parallel$ 平面 $CD'F$.

又 $A'E\cap BE=E$，从而平面 $A'EB\parallel$ 平面 $CD'F$，所以 $A'B\parallel$ 平面 $CD'F$.

(2) 由题设可知，$EF\perp FD'$，$EF\perp FC$，因此 $EF\perp$ 平面 $CD'F$，且 $\angle D'FC$ 为面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角的平面角，即 $\angle D'FC=60°$，所以平面 $CD'F\perp$ 平面 $EFCB$.

过 D' 作 FC 的垂线交 FC 于点 G，则 $D'G\perp$ 平面 $EFCB$.

以 F 为坐标原点，$\overrightarrow{FE}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{FE}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 F-xyz.



则由题设可得 $D'G=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$FG=\frac{1}{2}$. 所以 $E(1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$D'\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$B(1,\ 2,\ 0)$.

$\overrightarrow{CB}=(1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{CD'}=\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{FD'}=\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{FE}=(1,\ 0,\ 0)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,\ y,\ z)$ 是平面 BCD' 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD'}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ x+y=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 1)$.

设 $\boldsymbol{m}=(p,\ q,\ r)$ 是平面 $EFD'A'$ 的法向量，则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FD'}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{FE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{2}q+\frac{\sqrt{3}}{2}r=0,\\ p=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(0,\ \sqrt{3},\ -1)$.

则 $\cos\langle\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{7}}{7}$.

故面 BCD' 与面 $EFD'A'$ 所成的二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

18. 解：

(1) $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-3kx^2=-\frac{x^2(3kx+3k-1)}{1+x}$.

由于 $0<k<\frac{1}{3}$，因此 $\frac{1-3k}{3k}>0$. 当 $x\in\left(0,\ \frac{1-3k}{3k}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\ \frac{1-3k}{3k}\right)$ 单调递增；当 $x\in\left(\frac{1-3k}{3k},\ +\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1-3k}{3k},\ +\infty\right)$ 单调递减. 所以 $x=\frac{1-3k}{3k}$ 是 $f(x)$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 的唯一极值点.

又 $f(0)=0$，所以 $f\left(\frac{1-3k}{3k}\right)>0$. 由于当 $x\in(0,\ +\infty)$ 时，$ln(1+x)-x<0$，从而当 $x>\frac{1}{2k}$ 时，$f(x)<\frac{1}{2}x^2-kx^3<0$. 所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\ +\infty)$ 存在唯一零点.

(2)(ⅰ)由(1)知 $x_1=\frac{1-3k}{3k}$，故 $k=\frac{1}{3(1+x_1)}$，所以

$$f'(x)=\frac{x^2(x_1-x)}{(1+x)(1+x_1)},$$

$$g'(t)=f'(x_1+t)+f'(x_1-t)=-\frac{2t^2(2x_1+x_1^2-t^2)}{(1+x_1+t)(1+x_1-t)(1+x_1)}.$$

当 $t\in(0,\ x_1)$ 时，$g'(t)<0$，所以 $g(t)$ 在区间 $(0,\ x_1)$ 单调递减.

(ⅱ)结论：$2x_1>x_2$.

由(i)知，$g(x_1)<g(0)=0$，故 $f(2x_1)-f(0)<0$. 又 $f(0)=0$. 故 $f(2x_1)<0$，于是 $f(2x_1)<f(x_2)$.

由(1)知 $f(x)$ 在区间 $(x_1, +\infty)$ 单调递减，且 $x_2>x_1$，$2x_1>x_1$，所以 $2x_1>x_2$.

19. 解：

(1)由题设知打完 3 个或 4 个球后，甲比乙至少多得 2 分等价于甲的得分不少于 3 分. 因此 $p_3=p^3$，$p_4=p^4+C_4^3p^3q=p^3(4-3p)$.

(2)由(1)知 $p_4-p_3=3p^3(1-p)$，同理 $q_4-q_3=3(1-p)^3p$，所以 $\dfrac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=\dfrac{p^2}{(1-p)^2}$.

由题设 $\dfrac{p^2}{(1-p)^2}=4$，解得 $p=2$(舍去)，$p=\dfrac{2}{3}$.

(3)设 A_1 表示事件“打完 $2m$ 个球后，甲比乙至少多得 4 分”；A_2 表示事件“打完 $2m$ 个球后，甲比乙多得 2 分”；A_3 表示事件“打完 $2m$ 个球后，甲得分不超过乙得分”. A 表示事件“打完 $2m+1$ 个球后，甲比乙至少多得 2 分”，所以 $p_{2m+1}=P(A)$，$p_{2m}=P(A_1)+P(A_2)$，$P(A|A_1)=1$，$P(A|A_2)=p$，$P(A|A_3)=0$. 由全概率公式

$$p_{2m+1}=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(A|A_i)=P(A_1)+P(A_2)-qP(A_2)=p_{2m}-pC_{2m}^{m+1}p^mq^m.$$

同理可得 $q_{2m+1}=q_{2m}-qC_{2m}^{m+1}q^mp^m$.

所以 $p_{2m+1}-q_{2m+1}=p_{2m}-q_{2m}-(p-q)C_{2m}^{m+1}p^mq^m<p_{2m}-q_{2m}$.

设 B_1 表示事件“打完 $2m+1$ 个球后，甲比乙至少多得 3 分”；B_2 表示事件“打完 $2m+1$ 个球后，甲比乙多得 1 分”；B_3 表示事件“打完 $2m+1$ 个球后，乙比甲至少多得 1 分”. B 表示事件“打完 $2m+2$ 个球后，甲比乙至少多得 2 分”，所以 $p_{2m+2}=P(B)$，$p_{2m+1}=P(B_1)$，$P(B|B_1)=1$，$P(B|B_2)=p$，$P(B|B_3)=0$. 由全概率公式

$$p_{2m+2}=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(B|B_i)=p_{2m+1}+p^2C_{2m+1}^{m+1}p^mq^m.$$

同理可得 $q_{2m+2}=q_{2m+1}+q^2C_{2m+1}^{m+1}q^mp^m$. 所以

$$\begin{aligned}p_{2m+2}-q_{2m+2}-(p_{2m}-q_{2m})&=p_{2m+2}-q_{2m+2}-(p_{2m+1}-q_{2m+1})+p_{2m+1}-q_{2m+1}-(p_{2m}-q_{2m})\\&=(p-q)p^mq^m(C_{2m+1}^{m+1}-C_{2m}^{m+1})\\&>0.\end{aligned}$$

综上，对任意正整数 m，$p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

参 考 答 案

2024年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷（理科）

一、选择题

1. A　2. D　3. D　4. B　5. C　6. A

7. B　8. B　9. C　10. A　11. C　12. C

二、填空题

13. 5　14. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　15. 64　16. $\frac{7}{15}$

三、解答题

17. 解：

(1)列联表如下：

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

由列联表中的数据得 $K^2=\frac{150\times(26\times30-70\times24)^2}{100\times50\times96\times54}\approx4.688$.

由于 $K^2>3.841$，所以有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

又由于 $K^2<6.635$，所以没有99%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

(2)由样本数据，抽取的150件产品的优级品率 $\overline{p}=\frac{26+70}{150}=0.64$. 由已知$p=0.5$，$n=150$，故 $p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\approx0.5+0.067=0.567$，因此 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$，可以认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了.

18. 解：

(1)当 $n>1$ 时，$4S_n=3a_n+4$，$4S_{n-1}=3a_{n-1}+4$，故 $4a_n=3a_n-3a_{n-1}$，得 $a_n=-3a_{n-1}$.

由已知，$4a_1=4S_1=3a_1+4$，解得 $a_1=4$. 故 $a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$.

(2)由(1)知 $b_n=4n\cdot 3^{n-1}$，故

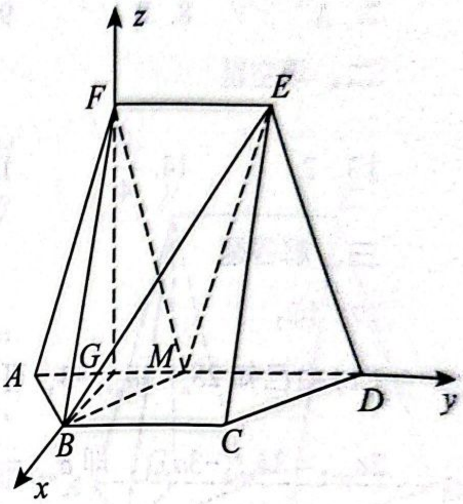
$$T_n=4(1\cdot 3^0+2\cdot 3^1+\cdots+n\cdot 3^{n-1}).$$

于是
$$3T_n=4(1\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots+n\cdot 3^n).$$

故
$$-2T_n=4(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot 3^n)$$
$$=2[(1-2n)\cdot 3^n-1].$$

所以 $T_n=(2n-1)\cdot 3^n+1$.

19. 解：



(1)由题意知 $MD=2$，$BC=2$，$MD\parallel BC$，所以四边形 $BCDM$ 为平行四边形，故 $BM\parallel CD$，又因为 $BM\not\subset$ 平面 CDE，所以 $BM\parallel$ 平面 CDE.

(2)记 AM 的中点为 G，连结 FG，BG. 因为 $BM=CD=AB$，所以 $BG\perp AM$，同理 $FG\perp AM$. 由已知可得 $BG=\sqrt{3}$，$FG=3$，又 $FB=2\sqrt{3}$，所以 $FB^2=BG^2+FG^2$，即 $FG\perp BG$，所以 FG，GD，GB 两两垂直. 以 G 为坐标原点，$\overrightarrow{GB}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $G-xyz$. 则 $F(0,0,3)$，$M(0,1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$E(0,2,3)$，$\overrightarrow{MB}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{ME}=(0,1,3)$，$\overrightarrow{MF}=(0,-1,3)$.

设平面 BMF 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，平面 BME 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(p,q,r)$. 则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{MB}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{MF}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\sqrt{3}x-y=0,\\ -y+3z=0,\end{cases}\text{可取 }\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3},3,1).$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{MB}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{ME}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}\sqrt{3}p-q=0,\\ q+3r=0,\end{cases}\text{可取 }\boldsymbol{n}_2=(\sqrt{3},3,-1).$$

$$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\ |\boldsymbol{n}_2|}=\frac{11}{13}.$$

因此，二面角 $F-BM-E$ 的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{13}$.

20. 解：

(1)由题意得 $a^2-b^2=1$，$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，解得 $a^2=4$，$b^2=3$.

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设直线 AB 的方程为 $y=k(x-4)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases} y=k(x-4), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$.

因此 $x_1+x_2=\dfrac{32k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{64k^2-12}{4k^2+3}$.

由题设 $\Delta=144(1-4k^2)>0$，所以 $|k|<\dfrac{1}{2}$，$x_1\neq1$，$x_2\neq1$.

直线 QB 过 $N\left(\dfrac{5}{2}, 0\right)$，所以直线 QB 的方程为 $y=\dfrac{y_2}{x_2-\dfrac{5}{2}}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$，令 $x=1$，可得 $Q\left(1, \dfrac{3y_2}{5-2x_2}\right)$.

因为 $\dfrac{3y_2}{5-2x_2}-y_1=\dfrac{3k(x_2-4)-5k(x_1-4)+2kx_2(x_1-4)}{5-2x_2}$

$=\dfrac{k[2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8]}{5-2x_2}$

$=\dfrac{k\left(\dfrac{128k^2-24}{4k^2+3}-\dfrac{160k^2}{4k^2+3}+8\right)}{5-2x_2}$

$=0$,

所以 $AQ\perp y$ 轴.

21. 解：

(1) $f(x)=(1+2x)\ln(1+x)-x$，$f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$，

$f'(x)=2\ln(1+x)+\dfrac{1+2x}{1+x}-1=2\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$. 当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$. 故当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得极小值，极小值为 $f(0)=0$.

(2)若 $a>0$，则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\dfrac{1}{a}<0$.

若 $a=0$，则 $f(1)=\ln 2-1<0$.

若 $a<0$，则当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant0$ 等价于 $\ln(1+x)-\dfrac{x}{1-ax}\geqslant0$.

设 $F(x)=\ln(1+x)-\dfrac{x}{1-ax}$，则 $F'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{(1-ax)^2}=\dfrac{x(a^2x-2a-1)}{(1+x)(1-ax)^2}$.

①若 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$，则当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，故 $F(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增，而 $F(0)=0$，所

以当 $x\geqslant 0$ 时，$F(x)\geqslant 0$，故 $f(x)\geqslant 0$.

②若 $-\frac{1}{2}<a<0$，可得 $F(x)$ 在区间 $\left(0,\ \frac{2a+1}{a^2}\right)$ 单调递减，而 $F(0)=0$，所以当 $0<x<\frac{2a+1}{a^2}$ 时，$F(x)<0$，$f(x)<0$.

综上，a 的取值范围是 $\left(-\infty,\ -\frac{1}{2}\right]$.

22. 解：

(1)由已知得 $\rho^2=\rho^2\cos^2\theta+2\rho\cos\theta+1$，由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得

$x^2+y^2=x^2+2x+1$，即 C 的直角坐标方程为 $y^2=2x+1$.

(2)由已知得 l 的直角坐标方程为 $y=x+a$.

设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，由 $\begin{cases}y=x+a,\\ y^2=2x+1\end{cases}$ 得 $x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$，故

$x_1+x_2=2(1-a)$，$x_1x_2=a^2-1$，$(x_1-x_2)^2=8-8a$，于是 $(y_1-y_2)^2=8-8a$.

由题设知 $\sqrt{2\times(8-8a)}=2$，解得 $a=\frac{3}{4}$.

23. 解：

(1) $2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2\geqslant(a+b)^2$. 由已知 $a+b\geqslant 3$，故 $(a+b)^2>a+b$. 因此 $2a^2+2b^2>a+b$.

(2)
$$\begin{aligned}|a-2b^2|+|b-2a^2|&\geqslant(2b^2-a)+(2a^2-b)\\&=(2a^2+2b^2)-(a+b)\\&\geqslant(a+b)^2-(a+b)\\&=(a+b)(a+b-1).\end{aligned}$$

由已知得 $(a+b)(a+b-1)\geqslant 6$，故 $|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant 6$.

2024年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷（文科）

一、选择题

1. D	2. C	3. A	4. C	5. B	6. C
7. A	8. B	9. D	10. B	11. A	12. C

二、填空题

13. 2　　14. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　15. 64　　16. $(-2,\ 1)$

三、解答题

17. 解：

(1)由已知 $2S_n=3a_{n+1}-3$，可知 $2S_{n+1}=3a_{n+2}-3$. 两式相减得

$2a_{n+1}=3a_{n+2}-3a_{n+1}$，即 $a_{n+2}=\frac{5}{3}a_{n+1}$，故$\{a_n\}$的公比为$\frac{5}{3}$.

由已知得 $2a_1=2S_1=3a_2-3$，以及 $a_2=\frac{5}{3}a_1$，解得 $a_1=1$. 故 $a_n=\left(\frac{5}{3}\right)^{n-1}$.

(2)由已知得 $S_n=\frac{1}{2}(3a_{n+1}-3)=\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}\right)^n-\frac{3}{2}$.

则

$$S_1+S_2+\cdots+S_n=\frac{3}{2}\left[\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{5}{3}\right)^n\right]-\frac{3n}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n-1}{\frac{5}{3}-1}-\frac{3n}{2}$$

$$=\frac{15}{4}\left(\frac{5}{3}\right)^n-\frac{3n}{2}-\frac{15}{4}.$$

18. 解：

(1)列联表如下：

	优级品	非优级品
甲车间	26	24
乙车间	70	30

由列联表中的数据得 $K^2=\dfrac{150\times(26\times30-70\times24)^2}{100\times50\times96\times54}\approx4.688$.

由于 $K^2>3.841$，所以有95%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

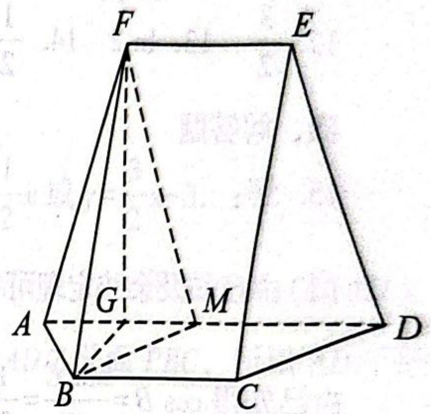
又由于 $K^2<6.635$，所以没有99%的把握认为甲、乙两车间产品的优级品率存在差异.

(2)由样本数据，抽取的150件产品的优级品率 $\overline{p}=\dfrac{26+70}{150}=0.64$. 由已知$p=0.5$，$n=150$，故

$p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\approx0.5+0.067=0.567$，因此 $\overline{p}>p+1.65\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$，可以认为生产线智能化升级改造后，该工厂产品的优级品率提高了.

19. 解：

(1)由题意知 $MD=2$，$BC=2$，$MD\parallel BC$，所以四边形 $BCDM$ 为平行四边形，故 $BM\parallel CD$，又因为 $BM\not\subset$平面 CDE，所以$BM\parallel$平面 CDE.



(2)记 AM 的中点为 G，连结 FG，BG，FM，因为 $BM=CD=AB$，所以 $BG\perp AM$，同理 $FG\perp AM$. 由已知可得 $BG=\sqrt{3}$，$FG=3$，又 $FB=2\sqrt{3}$，所以 $FB^2=BG^2+FG^2$，即 $FG\perp BG$，所以 $FG\perp$平面 $ABCD$. 由余弦定理和已知得 $\cos\angle FAB=\dfrac{\sqrt{10}}{20}$，所以 $\triangle FAB$ 的面积

$$S=\frac{1}{2}AF\times AB\times\sin\angle FAB=\frac{\sqrt{39}}{2}.$$

设 M 到平面 FAB 的距离为 h，故三棱锥 $M-FAB$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}Sh=\dfrac{\sqrt{39}}{6}h$，又因为三棱锥 $F-AMB$ 的体积为 $V=\dfrac{1}{3}\times3\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$，可得$h=\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$.

20. 解：

(1)$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$.

若 $a\leqslant0$，则$f'(x)<0$，故$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减；

若 $a>0$，则由$f'(x)=0$得 $x=\dfrac{1}{a}$. 当$0<x<\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)<0$；当$x>\dfrac{1}{a}$时，$f'(x)>0$. 故$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$单调递减，在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$单调递增.

(2)$f(x)<e^{x-1}$等价于$a(x-1)-\ln x+1-\frac{e^x}{e}<0$. 设函数$g(x)=a(x-1)-\ln x+1-\frac{e^x}{e}$，则$g'(x)=a-\frac{1}{x}-\frac{e^x}{e}$. 设函数$h(x)=a-\frac{1}{x}-\frac{e^x}{e}$，则$h'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{e}$.

当$x>1$时，$h'(x)<0$，所以$h(x)=g'(x)$在$(1, +\infty)$单调递减，而$g'(1)=a-2$，因为$a\leqslant 2$，所以$g'(1)\leqslant 0$. 故当$x>1$时，$g'(x)<0$，即$g(x)$在$(1, +\infty)$单调递减. 由于$g(1)=0$，所以当$x>1$时，$g(x)<0$，即当$x>1$时，$f(x)<e^{x-1}$.

21. 解：

(1)由题意得$a^2-b^2=1$，$\frac{1}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1$，解得$a^2=4$，$b^2=3$.

所以C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)设直线AB的方程为$y=k(x-4)$，$A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

由$\begin{cases} y=k(x-4), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$得$(4k^2+3)x^2-32k^2x+64k^2-12=0$.

因此$x_1+x_2=\frac{32k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{64k^2-12}{4k^2+3}$.

由题设$\Delta=144(1-4k^2)>0$，所以$|k|<\frac{1}{2}$，$x_1\neq 1$，$x_2\neq 1$.

直线QB过$N\left(\frac{5}{2}, 0\right)$，所以直线$QB$的方程为$y=\frac{y_2}{x_2-\frac{5}{2}}\left(x-\frac{5}{2}\right)$，令$x=1$，可得$Q\left(1, \frac{3y_2}{5-2x_2}\right)$.

$$\text{因为}\frac{3y_2}{5-2x_2}-y_1=\frac{3k(x_2-4)-5k(x_1-4)+2kx_2(x_1-4)}{5-2x_2}$$
$$=\frac{k[2x_1x_2-5(x_1+x_2)+8]}{5-2x_2}$$
$$=\frac{k\left(\frac{128k^2-24}{4k^2+3}-\frac{160k^2}{4k^2+3}+8\right)}{5-2x_2}$$
$$=0,$$

所以$AQ\perp y$轴.

22. 解：

(1)由已知得 $\rho^2=\rho^2\cos^2\theta+2\rho\cos\theta+1$，由 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 得

$x^2+y^2=x^2+2x+1$，即 C 的直角坐标方程为 $y^2=2x+1$.

(2)由已知得 l 的直角坐标方程为 $y=x+a$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由 $\begin{cases}y=x+a,\\ y^2=2x+1\end{cases}$ 得 $x^2+2(a-1)x+a^2-1=0$，故

$x_1+x_2=2(1-a)$，$x_1x_2=a^2-1$，$(x_1-x_2)^2=8-8a$，于是 $(y_1-y_2)^2=8-8a$.

由题设知 $\sqrt{2\times(8-8a)}=2$，解得 $a=\dfrac{3}{4}$.

23. 解：

(1) $2a^2+2b^2=(a+b)^2+(a-b)^2\geqslant(a+b)^2$. 由已知 $a+b\geqslant3$，故 $(a+b)^2>a+b$. 因此 $2a^2+2b^2>a+b$.

(2)
$$\begin{aligned}|a-2b^2|+|b-2a^2|&\geqslant(2b^2-a)+(2a^2-b)\\&=(2a^2+2b^2)-(a+b)\\&\geqslant(a+b)^2-(a+b)\\&=(a+b)(a+b-1).\end{aligned}$$

由已知得 $(a+b)(a+b-1)\geqslant6$，故 $|a-2b^2|+|b-2a^2|\geqslant6$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅰ卷

一、选择题

1. A　2. C　3. D　4. A　5. B　6. B　7. C　8. B

二、选择题

9. BC　10. ACD　11. ABD

三、填空题

12. $\frac{3}{2}$　13. ln 2　14. $\frac{1}{2}$

四、解答题

15. 解：

(1) 由已知及余弦定理可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<C<\pi$，故 $C=\frac{\pi}{4}$.

由已知得 $\cos B=\frac{\sin C}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，又 $0<B<\pi$，故 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)知 $\sin A=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

由(1)及正弦定理可得 $b=\frac{\sqrt{6}}{2}c$，故△ABC 的面积

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3+\sqrt{3}}{8}c^2=3+\sqrt{3},$$

解得 $c=2\sqrt{2}$.

16. 解：

(1) 由题意得 $\begin{cases}\frac{9}{b^2}=1,\\ \frac{9}{a^2}+\frac{9}{4b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a^2=12,\\ b^2=9.\end{cases}$

所以 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{1}{2}$.

(2) 当直线 l 垂直于 x 轴时，$B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$，△$ABP$ 的面积为 $\frac{9}{2}$，不合题意.

设直线 l 的方程为 $y-\frac{3}{2}=k(x-3)$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\\ y=kx+\frac{3}{2}-3k\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8k\left(\frac{3}{2}-3k\right)x+4\left(\frac{3}{2}-3k\right)^2-36=0$.

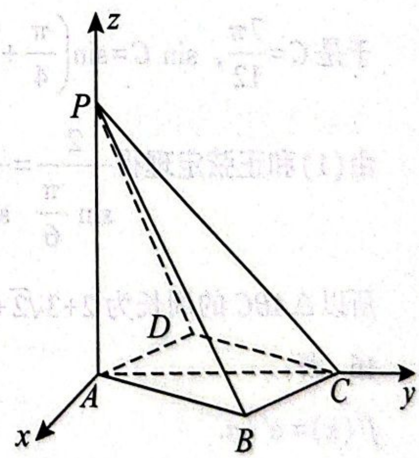
设 $B(x_B, y_B)$，则 $x_B=\frac{-8k\left(\frac{3}{2}-3k\right)}{3+4k^2}-3=\frac{12k^2-12k-9}{3+4k^2}$.

因此 $|PB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_B-3|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{|12k+18|}{3+4k^2}$，又 A 到 l 的距离为 $\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{1+k^2}}$，故 $\triangle ABP$ 的面积为 $\frac{9|4k^2+8k+3|}{6+8k^2}$.

所以 $\frac{9|4k^2+8k+3|}{6+8k^2}=9$，解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $k=\frac{3}{2}$，故 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$.

17. (1)因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$. 又因为 $AD\perp PB$，所以 $AD\perp$ 平面 PAB，故 $AD\perp AB$. 因为 $AC=2$，$BC=1$，$AB=\sqrt{3}$，所以 $BC\perp AB$. 故 $AD/\!/BC$，因为 $AD\not\subset$ 平面 PBC，所以 $AD/\!/$ 平面 PBC.

(2)以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AC}$ 的方向为 y 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$，则 $A(0, 0, 0)$，$C(0, 2, 0)$，$P(0, 0, 2)$.



设 $D(s, t, 0)$，由题意知 $s<0$，则 $\overrightarrow{PC}=(0, 2, -2)$，$\overrightarrow{CD}=(s, t-2, 0)$，$\overrightarrow{AD}=(s, t, 0)$.

由 $AD\perp DC$ 得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=s^2+t(t-2)=0$，即

$$s^2=t(2-t),$$

故 $0<t<2$.

平面 PAC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1, 0, 0)$. 设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2y-2z=0,\\ sx+(t-2)y=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(2-t, s, s)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{2-t}{\sqrt{(2-t)^2+2s^2}}=\frac{2-t}{\sqrt{4-t^2}}$.

由题意得$\sqrt{1-\frac{(2-t)^2}{4-t^2}}=\frac{\sqrt{42}}{7}$，即$\frac{2-t}{2+t}=\frac{1}{7}$，解得$t=\frac{3}{2}$.

因此$AD=\sqrt{t^2+s^2}=\sqrt{t^2+t(2-t)}=\sqrt{3}$.

18. $f(x)$的定义域为$(0,\ 2)$.

(1)当$b=0$时，$f'(x)=\frac{2}{x(2-x)}+a$.

因为$0<x(2-x)\leqslant 1$，所以$\frac{2}{x(2-x)}\geqslant 2$，等号成立当且仅当$x=1$. 由题意，$a\geqslant -\frac{2}{x(2-x)}$,故$a$的最小值为$-2$.

(2)因为$f(x)$的定义域关于1对称，且

$$f(x)+f(2-x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3+\ln\frac{2-x}{x}+a(2-x)+b(1-x)^3=2a,$$

所以曲线$y=f(x)$是中心对称图形，对称中心为点$(1,\ a)$.

(3)令函数$g(x)=f(x)+2$，依题意$g(x)>0$当且仅当$1<x<2$，从而$g(1)\leqslant 0$. 若$g(1)<0$，因为$g\left(\frac{3}{2}\right)>0$，所以存在$x_0\in\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$，使$g(x_0)=0$，矛盾，从而$g(1)=0$,故$a=-2$.

$$f'(x)=\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}+3b(x-1)^2=(x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)}+3b\right].$$

若$b<-\frac{2}{3}$，当$x\in\left(1,\ 1+\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\right)$时，$\frac{2}{x(2-x)}+3b<0$，从而$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$\left(1,\ 1+\sqrt{1+\frac{2}{3b}}\right)$单调递减，不符合题目要求.

若$b\geqslant -\frac{2}{3}$，当$x\in(0,\ 2)$时，$\frac{2}{x(2-x)}+3b\geqslant 0$. 从而$f'(x)\geqslant 0$，等号成立当且仅当$x=1$，故$f(x)$在区间$(0,\ 2)$单调递增，符合题目要求.

因此b的取值范围是$\left[-\frac{2}{3},\ +\infty\right)$.

19. (1)$(1,\ 2)$，$(1,\ 6)$，$(5,\ 6)$.

(2)数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}的前14项a_1，a_2，…，a_{14}中删去a_2和a_{13}后剩余的12项可被平均分为以下3组：a_1，a_4，a_7，a_{10}；a_3，a_6，a_9，a_{12}；a_5，a_8，a_{11}，a_{14}. 由题设知这3组中的4个数都能构成等差数列.

当$m\geqslant 4$时，数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}从第15项开始每连续4项分为一组，共可得$m-3$组，每组中的4个数都能构成等差数列.

所以当$m\geqslant 3$时，数列a_1，a_2，…，a_{4m+2}是$(2,\ 13)$-可分数列.

(3) 设 a_s，a_t，a_u，a_v 是数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 中不同的 4 项，数列 a_s，a_t，a_u，a_v 是等差数列等价于数列 s，t，u，v 是等差数列. 因此数列 a_1，a_2，…，a_{4m+2} 是 (i, j)-可分数列等价于数列 1，2，…，$4m+2$ 是 (i, j)-可分数列.

记集合 M 中元素的个数为 $|M|$.

令 $K_m=\{(i, j)\,|$ 数列 1，2，…，$4m+2$ 是 (i, j)-可分数列$\}$，则 $P_m=\dfrac{|K_m|}{C_{4m+2}^2}$.

因为 1，3，5，7 和 4，6，8，10 均为等差数列，故 $(2, 9)\in K_2$. 由(2)知 $(2, 13)\in K_3$.

若 $(2, 4m+1)\in K_m$，则由 $4m+1$，$4m+3$，$4m+5$，$4m+7$ 和 $4m+4$，$4m+6$，$4m+8$，$4m+10$ 均为等差数列，可得 $(2, 4m+9)\in K_{m+2}$. 所以当 $m\geqslant 2$ 时，均有 $(2, 4m+1)\in K_m$.

因为连续 4 个整数构成等差数列，所以 $(4i+1, 4m+6)\in K_{m+1}$，$i=0$，1，…，$m+1$，且 $K_m\subseteq K_{m+1}$. 若 $(u, v)\in K_m$，则 $(u+4, v+4)\in K_{m+1}$，故由 $(2, 4(m-i+2)+1)\in K_{m-i+2}$ 知 $(4i-2, 4m+5)\in K_{m+1}$，$i=1$，2，…，m. 故 $|K_{m+1}|-|K_m|\geqslant 2m+2$. 再由(1)知 $|K_1|=3$，可得 $|K_m|\geqslant m^2+m+1$，因此 $P_m\geqslant \dfrac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1}>\dfrac{1}{8}$.

2024 年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅱ卷

一、选择题

1. C　2. B　3. B　4. C　5. A　6. D　7. B　8. C

二、选择题

9. BC　10. ABD　11. AD

三、填空题

12. 95　13. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$　14. 24，112

四、解答题

15. 解：

(1)由已知得 $2\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)=2$，故 $A+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

(2)由题设和正弦定理可得 $\sqrt{2}\sin B\sin C=2\sin C\sin B\cos B$，故 $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，因此 $B=\frac{\pi}{4}$.

于是 $C=\frac{7\pi}{12}$，$\sin C=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

由(1)和正弦定理得 $\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{b}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{c}{\sin\frac{7\pi}{12}}$，解得 $b=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $2+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

16. 解：

$f'(x)=e^x-a$.

(1)当 $a=1$ 时，$f(1)=e-2$，$f'(1)=e-1$. 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-(e-2)=(e-1)(x-1)$，即 $y=(e-1)x-1$.

(2)设 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $f'(x_0)=0$，故 $e^{x_0}=a$，所以 $a>0$ 且 $x_0=\ln a$. 当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,\ln a)$ 单调递减；当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(\ln a,+\infty)$ 单调递增. 所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(\ln a)=a(1-\ln a-a^2)$.

设函数 $g(x)=1-\ln x-x^2$，则 $g(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 单调递减. 又因为 $g(1)=0$，所以 $g(x)<0$ 当且仅当 $x>1$.

故$f(\ln a)<0$当且仅当$a>1$. 因此，a的取值范围是$(1, +\infty)$.

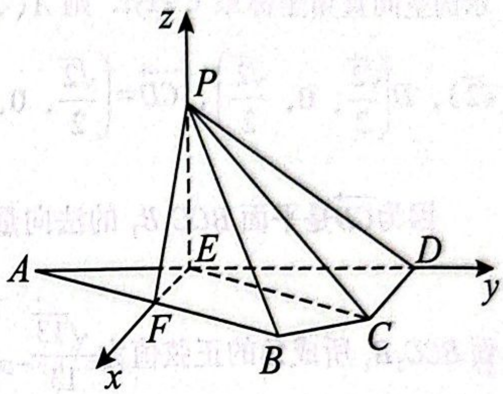
17. 解：

(1)由题设知$AE=2\sqrt{3}$，$AF=4$，$\angle FAE=30°$，由余弦定理可得$EF=2$，所以$AE\perp EF$. 由此可得$PE\perp EF$，$ED\perp EF$，所以$EF\perp$平面PED，故$EF\perp PD$.

(2)连结EC. 由题设知$EC^2=CD^2+ED^2=36$，所以$PE^2+EC^2=PC^2$，故$PE\perp EC$，由(1)知$PE\perp EF$.

因为EF，$EC\subset$平面$ABCD$，所以$PE\perp$平面$ABCD$.

以E为坐标原点，$\overrightarrow{EF}$为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系. 则



$P(0, 0, 2\sqrt{3})$，$C(3, 3\sqrt{3}, 0)$，$D(0, 3\sqrt{3}, 0)$，$F(2, 0, 0)$，$A(0, -2\sqrt{3}, 0)$，$\overrightarrow{DC}=(3, 0, 0)$，$\overrightarrow{PC}=(3, 3\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PF}=(2, 0, -2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AF}=(2, 2\sqrt{3}, 0)$.

设$\boldsymbol{m}=(x, y, z)$为平面PCD的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=0,\\ 3x+3\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$$ 可取$\boldsymbol{m}=(0, 2, 3)$.

设$\boldsymbol{n}=(p, q, r)$为平面PBF的法向量，则

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FB}=0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}2p-2\sqrt{3}r=0,\\ 2p+2\sqrt{3}q=0,\end{cases}$$ 可取$\boldsymbol{n}=(\sqrt{3}, -1, 1)$.

因此$\cos\langle\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{65}}$.

所以面PCD与面PBF所成的二面角的正弦值为$\dfrac{8\sqrt{65}}{65}$.

18. 解：

(1)甲、乙所在队的比赛成绩为0分的概率是

$$(1-0.4)^3+[1-(1-0.4)^3]\times(1-0.5)^3=0.314,$$

故甲、乙所在队的比赛成绩不少于5分的概率是$1-0.314=0.686$.

(2)设X为甲参加第一阶段比赛时，甲、乙所在队的比赛成绩；Y为乙参加第一阶段比赛时，甲、乙所在队的比赛成绩.

(ⅰ)由题意得$P(X=15)=[1-(1-p)^3]q^3$，$P(Y=15)=[1-(1-q)^3]p^3$.

因为$0<p<q\leqslant 1$，故$P(X=15)-P(Y=15)=3pq(q-p)(p+q-pq)>0$，所以应该由甲参加第一阶

段比赛.

(ⅱ) X 的所有可能取值为 0，5，10，15. 因为

$$P(X=5)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^1 q(1-q)^2,$$

$$P(X=10)=[1-(1-p)^3]\cdot C_3^2 q^2(1-q),$$

$$P(X=15)=[1-(1-p)^3]q^3,$$

所以

$$E(X)=0\cdot P(X=0)+5\cdot P(X=5)+10\cdot P(X=10)+15\cdot P(X=15)$$

$$=15pq\left[\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right].$$

同理可得 $E(Y)=15pq\left[\left(q-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$.

因为 $0<p<q\leqslant 1$，故 $\left(p-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>\left(q-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$，$E(X)>E(Y)$，所以应该由甲参加第一阶段比赛.

19. 解：

(1) 由题意得 $m=5^2-4^2=9$.

过 P_1 且斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线方程为 $y=\frac{1}{2}(x-5)+4$，与 C 的方程联立得

$$x^2-\left[\frac{1}{2}(x-5)+4\right]^2=9,$$

解得 $x=5$（舍去），$x=-3$，所以 Q_1 的横坐标为 -3，纵坐标为 0. 因此 $x_2=3$，$y_2=0$.

(2) 由题设知 P_n 在 C 的右支上，$Q_n(-x_{n+1}, y_{n+1})$. 由 P_n，Q_n 均在 C 上及直线 P_nQ_n 的斜率为 k 得

$$\begin{cases} x_n^2-y_n^2=x_{n+1}^2-y_{n+1}^2, \\ y_n-y_{n+1}=k(x_n+x_{n+1}). \end{cases}$$

可得 $y_n^2-y_{n+1}^2=x_n^2-x_{n+1}^2$，由于 $y_n\neq y_{n+1}$，故 $k(y_n+y_{n+1})=x_n-x_{n+1}$，因此 $(k+1)y_n+(k-1)y_{n+1}=(k+1)x_n+(k-1)x_{n+1}$，从而 $\frac{x_{n+1}-y_{n+1}}{x_n-y_n}=\frac{1+k}{1-k}$，所以数列 $\{x_n-y_n\}$ 是公比为 $\frac{1+k}{1-k}$ 的等比数列.

(3) 设 $q=\frac{1+k}{1-k}$，则 $q>1$. 由 (2) 及题设知 $x_n-y_n=q^{n-1}$，$x_n+y_n=\frac{9}{x_n-y_n}=\frac{9}{q^{n-1}}$，故

$$x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{q^{n-1}}+q^{n-1}\right),\ y_n=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{q^{n-1}}-q^{n-1}\right).$$

对任意正整数 n，$\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{y_{n+2}-y_{n+1}}=\frac{x_{n+3}-x_n}{y_{n+3}-y_n}=\frac{9-q^{2n+1}}{9+q^{2n+1}}$. 因此 $P_nP_{n+3}/\!/P_{n+1}P_{n+2}$，所以 $S_n=S_{n+1}$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷（理科）

一、选择题

1. A 2. C 3. B 4. D 5. C 6. A

7. B 8. D 9. B 10. C 11. C 12. B

二、填空题

13. 2 14. 15 15. 12 16. 2

三、解答题

17. 解：

(1)由已知可得 $a_1=0$，$2S_{n+1}=(n+1)a_{n+1}$，所以 $2S_{n+1}-2S_n=(n+1)a_{n+1}-na_n$，即 $(n-1)\cdot a_{n+1}=na_n$.

于是当 $n\geqslant 3$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n-2}$，

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot a_2=n-1.$$

因为 $a_1=0$，$a_2=1$，所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n-1$.

(2)由(1)得 $\dfrac{a_{n+1}}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$，所以

$$T_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n},$$

$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n+1}}.$$

可得
$$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

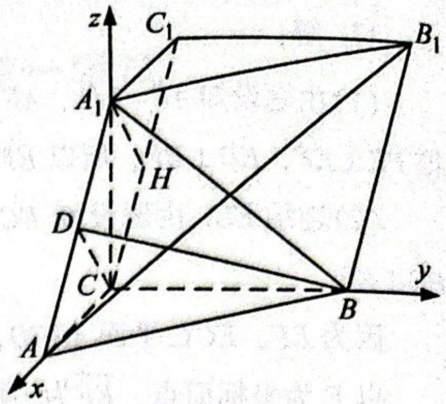
$$=1-\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}.$$

因此 $T_n=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}$.

18. 解：

(1)由 $A_1C\perp$ 平面 ABC 得 $BC\perp A_1C$. 又因为 $BC\perp AC$，所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，因此平面

$BCC_1B_1\perp$平面ACC_1A_1.



作$A_1H\perp C_1C$，垂足为H，则$A_1H\perp$平面BCC_1B_1，由题设得$A_1H=1$. 因为$AC\cdot A_1C=AA_1\cdot A_1H=2$，$AC^2+A_1C^2=4$，所以$AC=A_1C=\sqrt{2}$.

(2)连结A_1B，由(1)可得$BA=BA_1$. 设D为AA_1的中点，连结BD，CD，则$BD\perp AA_1$，$CD=1$. 因为AA_1与BB_1的距离为2，所以$BD=2$，$BC=\sqrt{BD^2-CD^2}=\sqrt{3}$.

以C为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$的方向为x轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$C-xyz$. 则$A(\sqrt{2},0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2})$，$B_1(-\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$，$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{2})$.

因为$\overrightarrow{CD}$是平面BCC_1B_1的法向量，$\cos\langle\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB_1}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{AB_1}|}=-\frac{\sqrt{13}}{13}$，所以$AB_1$与平面$BCC_1B_1$所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{13}}{13}$.

19. 解：

(1)X所有可能取值为0，1，2，且

$$P(X=k)=\frac{C_2^k\cdot C_{38}^{20-k}}{C_{40}^{20}},\ k=0,1,2.$$

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{19}{78}$	$\frac{20}{39}$	$\frac{19}{78}$

X的数学期望$E(X)=0\times\frac{19}{78}+1\times\frac{20}{39}+2\times\frac{19}{78}=1$.

(2)(ⅰ)$m=\frac{23.2+23.6}{2}=23.4$.

列联表如下：

	$<m$	$\geqslant m$
对照组	6	14
试验组	14	6

(ⅱ)由列联表中的数据，可得统计量 K^2 的观测值为

$$\frac{40\times(6\times6-14\times14)^2}{20\times20\times20\times20}=6.4.$$

由于 $6.4>3.841$，因此有 95%的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异.

20. 解：

(1)设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

由 $\begin{cases}x-2y+1=0,\\ y^2=2px\end{cases}$ 得 $y^2-4py+2p=0$，则 $y_1+y_2=4p$，$y_1y_2=2p$.

于是 $|AB|=\sqrt{5}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{40(2p^2-p)}$.

由题设知 $\sqrt{40(2p^2-p)}=4\sqrt{15}$，得 $p=2$.

(2)由(1)知 $F(1, 0)$.

设 $M(x_M, y_M)$，$N(x_N, y_N)$，直线 MN：$x=my+n$.

由 $\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$ 得 $(x_M-1)(x_N-1)+y_My_N=0$，即

$$(1+m^2)y_My_N+m(n-1)(y_M+y_N)+(n-1)^2=0. \quad ①$$

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\ x=my+n\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4n=0$，故

$$y_M+y_N=4m,\ y_My_N=-4n. \quad ②$$

于是 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_M+y_N)^2-4y_My_N}=4\sqrt{(1+m^2)(m^2+n)}$.

点 F 到直线 MN 的距离 $d=\frac{|n-1|}{\sqrt{1+m^2}}$.

$\triangle MFN$ 面积 $S=\frac{1}{2}\times|MN|\times d=2|n-1|\cdot\sqrt{m^2+n}$.

又由①②得 $4(m^2+n)=(n-1)^2$，故 $S=(n-1)^2$，且 $n^2-6n+1=4m^2\geqslant0$，即

$n\leqslant3-2\sqrt{2}$ 或 $n\geqslant3+2\sqrt{2}$.

所以 $S\geqslant(2-2\sqrt{2})^2=12-8\sqrt{2}$，等号成立时可取 $M(3-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-2)$，$N(3-2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$.

因此 $\triangle MFN$ 面积的最小值为 $12-8\sqrt{2}$.

21. 解：

$$(\cos^2x)'=(\cos x\cos x)'=-2\sin x\cos x,$$

$$(\cos^3x)'=(\cos x\cos^2x)'=-3\sin x\cos^2x.$$

$$f'(x)=a-\frac{\cos^4x+3\sin^2x\cos^2x}{\cos^6x}=a-\frac{3-2\cos^2x}{\cos^4x}.$$

(1)当$a=8$时，$f'(x)=8-\frac{3-2\cos^2x}{\cos^4x}=\frac{(2\cos^2x-1)(4\cos^2x+3)}{\cos^4x}$.

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$单调递增；

当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$单调递减.

(2)若$a\leqslant 0$，则$f(x)<\sin 2x$，下设$a>0$.

当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f(x)<\sin 2x$当且仅当$\frac{1}{\cos^3x}+2\cos x>a\frac{x}{\sin x}$.

因为当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\sin x<x$，所以当$\frac{1}{\cos^3x}+2\cos x>a\frac{x}{\sin x}$时，有

$$\frac{1}{\cos^3x}+2\cos x>a.$$

设$g(t)=\frac{1}{t^3}+2t$，则$g'(t)=2-\frac{3}{t^4}$，当$t\in(0,1)$时，$g'(t)<0$，故$g(t)$在$(0,1)$单调递减，所以$t\in(0,1)$时，$g(t)>g(1)=3$，故$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\frac{1}{\cos^3x}+2\cos x>3$，所以$a\leqslant 3$.

当$a\leqslant 3$时，$f(x)-\sin 2x\leqslant 3x-\frac{\sin x}{\cos^3x}-\sin 2x$.

设$h(x)=3x-\frac{\sin x}{\cos^3x}-\sin 2x$，则

$$h'(x)=3-\frac{3-2\cos^2x}{\cos^4x}-2\cos 2x=\frac{-4\cos^6x+5\cos^4x+2\cos^2x-3}{\cos^4x}.$$

令$F(t)=-4t^3+5t^2+2t-3$，则$F'(t)=-12t^2+10t+2=2(1-t)(6t+1)$.

当$t\in(0,1)$时，$F'(t)>0$，故$F(t)$在$(0,1)$单调递增，所以$t\in(0,1)$时，$F(t)<F(1)=0$.

故$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$-4\cos^6x+5\cos^4x+2\cos^2x-3<0$，从而$h'(x)<0$，所以$h(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递减，故$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$h(x)<h(0)=0$，所以$f(x)<\sin 2x$.

综上，a的取值范围是$(-\infty,3]$.

22. 解：

(1)由题设知$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

当$y=0$时，$t_A=-\frac{1}{\sin\alpha}$；当$x=0$时，$t_B=-\frac{2}{\cos\alpha}$.

因此 $|PA|\cdot|PB|=|t_A|\cdot|t_B|=\left|-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right|\cdot\left|-\dfrac{2}{\cos\alpha}\right|=\dfrac{4}{|\sin 2\alpha|}$.

由题设知 $|\sin 2\alpha|=1$，解得 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

(2) l 的直角坐标方程为 $x+y=3$，故其极坐标方程为

$$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=3.$$

23. 解：

(1) $f(x)=\begin{cases}a-2x,\ x\leqslant a,\\ 2x-3a,\ x>a.\end{cases}$

当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)<x\Leftrightarrow a-2x<x\Leftrightarrow x>\dfrac{a}{3}$.

当 $x>a$ 时，$f(x)<x\Leftrightarrow 2x-3a<x\Leftrightarrow x<3a$.

因此不等式 $f(x)<x$ 的解集为 $\left(\dfrac{a}{3},\ 3a\right)$.

(2) 曲线 $y=f(x)$ 由以 $(a,\ -a)$ 为端点的两条射线 l_1：$y=a-2x(x\leqslant a)$ 和 l_2：$y=2x-3a(x\geqslant a)$ 组成，l_1 与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$，$l_2$ 与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{3a}{2},\ 0\right)$，因此曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3a}{2}-\dfrac{a}{2}\right)\times a=\dfrac{1}{2}a^2$.

由题意知 $\dfrac{1}{2}a^2=2$，所以 $a=2$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

全国乙卷（理科）

一、选择题

1. B　　2. A　　3. D　　4. D　　5. C　　6. D

7. C　　8. B　　9. C　　10. B　　11. D　　12. A

二、填空题

13. $\frac{9}{4}$　　14. 8　　15. -2　　16. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right]$

三、解答题

17. 解：

(1) 样本平均数 $\bar{z}=\frac{1}{10}\times[9+6+8+(-8)+15+11+19+18+20+12]=11$.

样本方差 $s^2=\frac{(-2)^2+(-5)^2+(-3)^2+(-19)^2+4^2+0^2+8^2+7^2+9^2+1^2}{10}=61$.

(2) 由于 $\bar{z}=11>2\sqrt{\frac{61}{10}}$，因此可以认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高.

18. 解：

(1) 在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理和题设可得

$$\begin{aligned}BC^2&=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC\\&=2\times2+1\times1-2\times2\times1\times\cos 120^\circ\\&=7,\end{aligned}$$

故 $BC=\sqrt{7}$.

由正弦定理得 $\sin\angle ABC=\frac{AC}{BC}\cdot\sin\angle BAC$.

因此 $\sin\angle ABC=\frac{1}{\sqrt{7}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{21}}{14}$.

(2) 由 (1) 和题设得 $\cos\angle ABC=\sqrt{1-\sin^2\angle ABC}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$.

故 $\tan\angle ABC=\frac{\sin\angle ABC}{\cos\angle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{5}$. 由题设可知，$\tan\angle ABC=\frac{AD}{AB}$，故 $AD=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

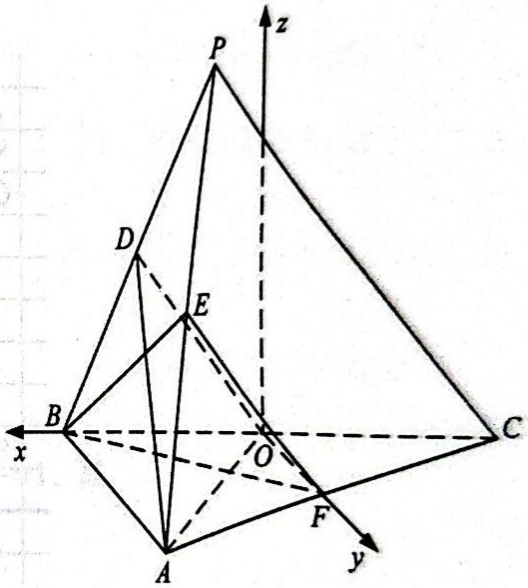
所以$\triangle ADC$的面积为$\frac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin(120°-90°)=\frac{\sqrt{3}}{10}$.

19. 解：

(1)由题意得$AO=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{3}$，$\sin\angle OBF=\sin\angle BAO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\angle ACB=\angle OBF$，连结$FO$，则由$O$为$BC$的中点得$FO\perp BC$. 又$AB\perp BC$，所以$FO/\!/AB$，故$F$为$AC$的中点. 又因为$D$，$E$分别为$BP$，$AP$的中点，所以$EF/\!/PC/\!/DO$，而$EF\not\subset$平面$ADO$，所以$EF/\!/$平面$ADO$.

(2)由题意得$DO=\frac{1}{2}PC=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$AD=\sqrt{5}DO=\frac{\sqrt{30}}{2}$，所以$AD^2=AO^2+OD^2$，因此$AO\perp OD$，故由(1)知$AO\perp EF$. 又$AO\perp BF$，所以$AO\perp$平面$BEF$，因此平面$ADO\perp$平面$BEF$.

(3)以O为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$的方向为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$O\text{-}xyz$，则$A(\sqrt{2},2,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，由题设得$DB=DO$，设$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},s,t\right)(t>0)$，由$DO=\frac{\sqrt{6}}{2}$，$AD=\frac{\sqrt{30}}{2}$得$\begin{cases}s^2+t^2=1,\\(s-2)^2+t^2=7,\end{cases}$解得$s=-\frac{1}{2}$，$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$D\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



设$\boldsymbol{n}=(p,q,r)$是平面ADO的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\sqrt{2}p+2q=0,\\\frac{\sqrt{2}}{2}p-\frac{1}{2}q+\frac{\sqrt{3}}{2}r=0,\end{cases}$可取$\boldsymbol{n}=(-\sqrt{2},1,\sqrt{3})$.

平面AOC的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(0,0,1)$. 所以$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因此二面角$D\text{-}AO\text{-}C$的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. 解：

(1)由题意得$b=2$，$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，解得$a^2=9$.

所以C的方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$.

(2)设 $P(x_1, y_1)$，$M(0, y_M)$，则直线 AP：$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$y_M=\dfrac{2y_1}{x_1+2}$.

设 $Q(x_2, y_2)$，$N(0, y_N)$，同理可得 $y_N=\dfrac{2y_2}{x_2+2}$.

设直线 PQ：$y=k(x+2)+3$，MN 的中点 $D(0, y_D)$，则

$$y_D=\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{k(x_1+2)+3}{x_1+2}+\frac{k(x_2+2)+3}{x_2+2}=2k+\frac{3(x_1+2+x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}.$$

由 $\begin{cases} y=k(x+2)+3, \\ \dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1 \end{cases}$ 得 $(4k^2+9)(x+2)^2+12(2k-3)(x+2)+36=0$.

故 $(x_1+2)+(x_2+2)=\dfrac{12(3-2k)}{4k^2+9}$，$(x_1+2)(x_2+2)=\dfrac{36}{4k^2+9}$.

所以 $y_D=2k+\dfrac{3(x_1+2+x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=3$.

因此线段 MN 的中点为定点 $(0, 3)$.

21. 解：

(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1+x)$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\dfrac{1}{1+x}$，所以 $f(1)=0$，$f'(1)=-\ln 2$.

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y=-\ln 2\cdot(x-1)$.

(2)设 $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，则 $g(x)=(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$.

若存在 a，b，使得曲线 $y=g(x)$ 关于直线 $x=b$ 对称，则 $(-\infty, -1)\cup(0, +\infty)$ 关于 $x=b$ 对称，所以 $b=-\dfrac{1}{2}$.

由 $g(x)=g(-1-x)$ 得 $(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=(-1-x+a)\ln\dfrac{x}{1+x}$，整理得

$$(x+a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=(x+1-a)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

所以 $a=\dfrac{1}{2}$，故存在 $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$，使得曲线 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称.

(3)$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\cdot\dfrac{1}{1+x}=-\dfrac{1}{x^2}\left[\ln(1+x)-\dfrac{ax^2+x}{1+x}\right]$.

令 $h(x)=\ln(1+x)-\dfrac{ax^2+x}{1+x}$，则 $h(0)=0$，且

$$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{(2ax+1)(1+x)-(ax^2+x)}{(1+x)^2}=\frac{x(1-2a-ax)}{(1+x)^2}.$$

（ⅰ）若 $a\leqslant 0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，从而 $h(x)>h(0)=0$，故当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不存在极值点.

（ⅱ）若 $a\geqslant\frac{1}{2}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，从而 $h(x)<h(0)=0$，故当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不存在极值点.

（ⅲ）若 $0<a<\frac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$ 单调递增；当 $x\in\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$ 单调递减. 所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-2\right]$ 时，$h(x)>h(0)=0$.

取 $x_1=e^t-1$，其中常数 $t>\frac{4}{a}$，则 $x_1\in\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$，且

$$h(x_1)=t-\frac{a(e^t-1)^2+e^t-1}{e^t}<t+1-ae^t<t+1-a\left(1+\frac{t}{2}\right)^2=(t+2)\left[\frac{t+1}{t+2}-\frac{a}{4}(t+2)\right]<0,$$

所以 $h(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a}-2,+\infty\right)$ 有唯一零点 x_0. 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)<0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 单调递增，因此 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 存在极值点 x_0.

综上，a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

22. 解：

(1) 由 C_1 的极坐标方程得，$\rho^2=2\rho\sin\theta$，又 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，故 $x^2+y^2=2y$. 又 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，因此 C_1 的直角坐标方程为 $y=1+\sqrt{1-x^2}\ (0\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) 由 (1) 知，C_1 与直线 $y=x+m$ 有公共点当且仅当存在 $x\in[0,1]$ 使得 $1+\sqrt{1-x^2}=x+m$，即 $m=\sqrt{1-x^2}-x+1$. 当 $x\in[0,1]$ 时，$-1\leqslant\sqrt{1-x^2}-x\leqslant 1$，因此 $0\leqslant m\leqslant 2$.

由题设知，C_2 与直线 $y=x+m$ 有公共点当且仅当存在 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 使得 $2\sin\alpha=2\cos\alpha+m$，即 $m=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. 当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$2<2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2\sqrt{2}$，因此 $2<m\leqslant 2\sqrt{2}$.

综上，m 的取值范围是 $(-\infty,0)\cup(2\sqrt{2},+\infty)$.

23. 解：

(1)$f(x)=\begin{cases}-3x+2, & x<0, \\ x+2, & 0\leqslant x<2, \\ 3x-2, & x\geqslant 2.\end{cases}$

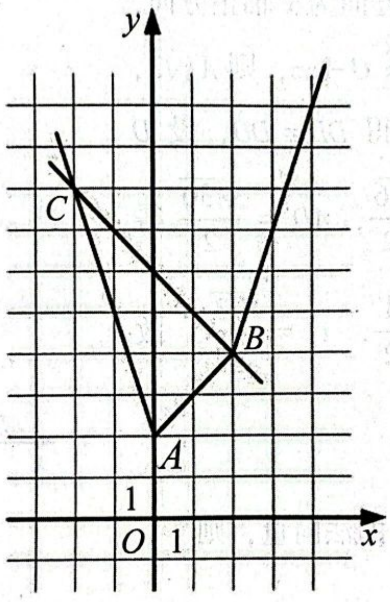
当 $x<0$ 时，$f(x)\leqslant 6-x\Leftrightarrow -3x+2\leqslant 6-x\Leftrightarrow x\geqslant -2$，得 $-2\leqslant x<0$.

当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)\leqslant 6-x\Leftrightarrow x+2\leqslant 6-x\Leftrightarrow x\leqslant 2$，得 $0\leqslant x<2$.

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant 6-x\Leftrightarrow 3x-2\leqslant 6-x\Leftrightarrow x\leqslant 2$，得 $x=2$.

因此不等式 $f(x)\leqslant 6-x$ 的解集为 $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$.

(2)不等式组 $\begin{cases}f(x)\leqslant y, \\ x+y-6\leqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域为 $\triangle ABC$ 所围成的平面区域，其中 $A(0,\ 2)$，$B(2,\ 4)$，$C(-2,\ 8)$，因此所求平面区域的面积为 8.



2023 年普通高等学校招生全国统一考试

全国甲卷（文科）

一、选择题

1. A　　2. C　　3. B　　4. D　　5. C　　6. B

7. B　　8. C　　9. D　　10. A　　11. A　　12. C

二、填空题

13. $-\frac{1}{2}$　　14. 2　　15. 15　　16. $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$

三、解答题

17. 解：

(1)由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

由题设得 $2(1-bc)\cos A=0$，且 $\cos A\neq 0$，所以 $bc=1$.

(2)由正弦定理得 $\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin A\cos B+\sin B\cos A}-\frac{\sin B}{\sin C}=1$.

因为 $\sin C=\sin(A+B)$，所以

$$\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A-\sin B}{\sin A\cos B+\sin B\cos A}=1，即$$

$$2\sin B\cos A=-\sin B.$$

由 $\sin B>0$ 得 $\cos A=-\frac{1}{2}$.

因此△ABC 面积为 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

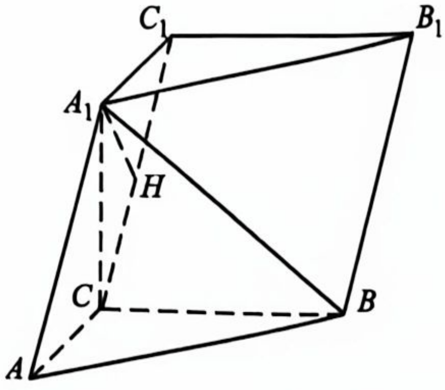
18. 解：

(1)因为 $A_1C\perp$ 平面 ABC，所以 $A_1C\perp BC$.

又由 $\angle ACB=90°$ 知 $AC\perp BC$. 所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

因此平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BB_1C_1C.

(2)作 $A_1H\perp CC_1$，垂足为 H. 由(1)知 $A_1H\perp$ 平面 BB_1C_1C，所以 A_1H 为四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高.



因为 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，$AB=A_1B$，故 $AC=A_1C$.

又 $A_1C\perp AC$，$AA_1=2$，所以 $AC=A_1C=\sqrt{2}$.

由 $AC\cdot A_1C=AA_1\cdot A_1H$ 得 $A_1H=1$.

因此四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高为 1.

19. 解：

(1)试验组的样本平均数为

$\frac{1}{20}$(7.8+9.2+11.4+12.4+13.2+15.5+16.5+18.0+18.8+19.2+

19.8+20.2+21.6+22.8+23.6+23.9+25.1+28.2+32.3+36.5)

=19.8.

(2)(ⅰ)$m=\frac{23.2+23.6}{2}=23.4$.

列联表如下：

	$<m$	$\geqslant m$
对照组	6	14
试验组	14	6

(ⅱ)由列联表中的数据，可得统计量 K^2 的观测值为

$$\frac{40\times(6\times6-14\times14)^2}{20\times20\times20\times20}=6.4.$$

由于 6.4>3.841，因此有 95%的把握认为小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异.

20. 解：

$$(\cos^2x)'=(\cos x\cdot\cos x)'=-2\sin x\cos x,\ f'(x)=a-\frac{2-\cos^2x}{\cos^3x}.$$

(1)当 $a=1$ 时，$f'(x)=\frac{\cos^3x+\cos^2x-2}{\cos^3x}$.

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$单调递减.

(2)当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)+\sin x=ax+\sin x\cdot\left(1-\frac{1}{\cos^2x}\right)<0$.

当 $a>0$ 时，因为 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时，$\sin x<x$，所以

$$f(x)+\sin x>\sin x\cdot\left(a+1-\frac{1}{\cos^2x}\right).$$

因为 $a>0$，所以 $0<\frac{1}{a+1}<1$，取 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$满足：$\cos^2x_0>\frac{1}{a+1}$，从而$f(x_0)+\sin x_0>0$.

综上，a 的取值范围为$(-\infty, 0]$.

21. 解：

(1)设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

由$\begin{cases} x-2y+1=0, \\ y^2=2px \end{cases}$得 $y^2-4py+2p=0$，则 $y_1+y_2=4p$，$y_1y_2=2p$.

于是 $|AB|=\sqrt{5}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{40(2p^2-p)}$.

由题设知$\sqrt{40(2p^2-p)}=4\sqrt{15}$，得 $p=2$.

(2)由(1)知 $F(1, 0)$.

设 $M(x_M, y_M)$，$N(x_N, y_N)$，直线 MN：$x=my+n$.

由$\overrightarrow{FM}\cdot\overrightarrow{FN}=0$得$(x_M-1)(x_N-1)+y_My_N=0$，即

$$(1+m^2)y_My_N+m(n-1)(y_M+y_N)+(n-1)^2=0. \quad ①$$

由$\begin{cases} y^2=4x, \\ x=my+n \end{cases}$得 $y^2-4my-4n=0$，故

$$y_M+y_N=4m,\ y_My_N=-4n. \quad ②$$

于是 $|MN|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_M+y_N)^2-4y_My_N}=4\sqrt{(1+m^2)(m^2+n)}$.

点 F 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|n-1|}{\sqrt{1+m^2}}$.

$\triangle MFN$ 面积 $S=\dfrac{1}{2}\times|MN|\times d=2|n-1|\cdot\sqrt{m^2+n}$.

又由①②得 $4(m^2+n)=(n-1)^2$，故 $S=(n-1)^2$，且 $n^2-6n+1=4m^2\geqslant 0$，即

$$n\leqslant 3-2\sqrt{2}\text{或 }n\geqslant 3+2\sqrt{2}.$$

所以 $S\geqslant(2-2\sqrt{2})^2=12-8\sqrt{2}$，等号成立时可取 $M(3-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}-2)$，$N(3-2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2})$.

因此$\triangle MFN$ 面积的最小值为 $12-8\sqrt{2}$.

22. 解：

(1)由题设知 $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.

当 $y=0$ 时，$t_A=-\dfrac{1}{\sin\alpha}$；当 $x=0$ 时，$t_B=-\dfrac{2}{\cos\alpha}$.

因此 $|PA|\cdot|PB|=|t_A|\cdot|t_B|=\left|-\dfrac{1}{\sin\alpha}\right|\cdot\left|-\dfrac{2}{\cos\alpha}\right|=\dfrac{4}{|\sin 2\alpha|}$.

由题设知 $|\sin 2\alpha|=1$，解得 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

(2) l 的直角坐标方程为 $x+y=3$，故其极坐标方程为

$$\rho\cos\theta+\rho\sin\theta=3.$$

23. 解：

(1) $f(x)=\begin{cases}a-2x, & x\leqslant a,\\ 2x-3a, & x>a.\end{cases}$

当 $x\leqslant a$ 时，$f(x)<x\Leftrightarrow a-2x<x\Leftrightarrow x>\dfrac{a}{3}$.

当 $x>a$ 时，$f(x)<x\Leftrightarrow 2x-3a<x\Leftrightarrow x<3a$.

因此不等式 $f(x)<x$ 的解集为 $\left(\dfrac{a}{3},\ 3a\right)$.

(2) 曲线 $y=f(x)$ 由以 $(a,\ -a)$ 为端点的两条射线 l_1：$y=a-2x\ (x\leqslant a)$ 和 l_2：$y=2x-3a\ (x\geqslant a)$ 组成，l_1 与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$，$l_2$ 与 x 轴的交点为 $\left(\dfrac{3a}{2},\ 0\right)$，因此曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3a}{2}-\dfrac{a}{2}\right)\times a=\dfrac{1}{2}a^2$.

由题意知 $\dfrac{1}{2}a^2=2$，所以 $a=2$.

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

全国乙卷（文科）

一、选择题

1. C　2. A　3. D　4. C　5. D　6. B

7. C　8. B　9. A　10. D　11. C　12. D

二、填空题

13. $\frac{9}{4}$　14. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$　15. 8　16. 2

三、解答题

17. 解：

(1)样本平均数 $\bar{z}=\frac{1}{10}\times[9+6+8+(-8)+15+11+19+18+20+12]=11$.

样本方差 $s^2=\frac{(-2)^2+(-5)^2+(-3)^2+(-19)^2+4^2+0^2+8^2+7^2+9^2+1^2}{10}=61$.

(2)由于 $\bar{z}=11>2\sqrt{\frac{61}{10}}$，因此可以认为甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高.

18. 解：

(1)设$\{a_n\}$的公差为 d，由题设得 $a_1+d=11$，$10a_1+\frac{10\times9}{2}d=40$.

解得 $a_1=13$，$d=-2$.

因此 $a_n=-2n+15$.

(2)由(1)知，当 $n\leqslant7$ 时，$a_n>0$，当 $n>7$ 时，$a_n<0$. 因此

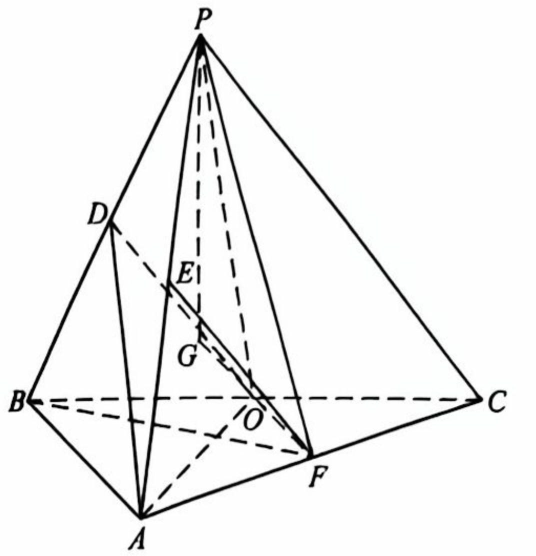
当 $n\leqslant7$ 时，$T_n=S_n=-n^2+14n$；

当 $n>7$ 时，$T_n=S_7+|S_n-S_7|=n^2-14n+98$.

19. 解：

(1)由题意得 $AO=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{3}$，$\sin\angle OBF=\sin\angle BAO=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle ACB=\angle OBF$，由 O 为 BC 的中点得 $FO\perp BC$. 又 $AB\perp BC$，所以 $FO/\!/AB$，故 F 为 AC 的中点. 又因为 D，E 分别为 BP，AP 的中点，所以 $EF/\!/PC/\!/DO$，而 $EF\not\subset$平面 ADO，所以 $EF/\!/$平面 ADO.

(2)连结 PF. 由(1)知 $BO\perp FO$，又 $BO\perp PO$，所以 $BO\perp$ 平面 POF，故平面 $POF\perp$ 平面 ABC. 过 P 作直线 OF 的垂线，垂足为 G，则 $PG\perp$ 平面 ABC.



由题知 $PG=PO\times\sin(180°-\angle POF)=\sqrt{3}$，所以三棱锥 $P\text{-}ABC$ 的体积

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times AB\times BC\times PG=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

20. 解：

(1)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1+x)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{1}{1+x}$，所以 $f(1)=0$，$f'(1)=-\ln 2$.

曲线 $y=f(x)$ 在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=-\ln 2\cdot(x-1)$.

(2)$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\cdot\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{x^2}\left[\ln(1+x)-\frac{ax^2+x}{1+x}\right]$.

令 $h(x)=\ln(1+x)-\frac{ax^2+x}{1+x}$，则 $h(0)=0$，且

$$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{(2ax+1)(1+x)-(ax^2+x)}{(1+x)^2}=\frac{x(1-2a-ax)}{(1+x)^2}.$$

(ⅰ)若 $a\leqslant 0$，当 $x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递增，从而 $h(x)>h(0)=0$，故当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递减.

(ⅱ)若 $a\geqslant\frac{1}{2}$，当 $x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$单调递减，从而 $h(x)<h(0)=0$，故当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$单调递增.

(ⅲ)若 $0<a<\frac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$单调递增，故当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$时，$h(x)>h(0)=0$，故当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$在$\left(0,\frac{1}{a}-2\right)$单调递减，不合题意.

综上，a 的取值范围是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

21. 解：

(1)由题意得 $b=2$，$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，解得 $a^2=9$.

所以 C 的方程为$\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1$.

(2)设 $P(x_1, y_1)$，$M(0, y_M)$，则直线 AP：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，$y_M=\frac{2y_1}{x_1+2}$.

设 $Q(x_2, y_2)$，$N(0, y_N)$，同理可得 $y_N=\frac{2y_2}{x_2+2}$.

设直线 PQ：$y=k(x+2)+3$，MN 的中点 $D(0, y_D)$，则

$$y_D=\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{k(x_1+2)+3}{x_1+2}+\frac{k(x_2+2)+3}{x_2+2}=2k+\frac{3(x_1+2+x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}.$$

由$\begin{cases}y=k(x+2)+3,\\ \frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{4}=1\end{cases}$得$(4k^2+9)(x+2)^2+12(2k-3)(x+2)+36=0$.

故$(x_1+2)+(x_2+2)=\frac{12(3-2k)}{4k^2+9}$，$(x_1+2)(x_2+2)=\frac{36}{4k^2+9}$.

所以 $y_D=2k+\frac{3(x_1+2+x_2+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=3$.

因此线段 MN 的中点为定点$(0, 3)$.

22. 解：

(1)由 C_1 的极坐标方程得，$\rho^2=2\rho\sin\theta$，又 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，故 $x^2+y^2=2y$. 又$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，因此 C_1 的直角坐标方程为 $y=1+\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(2)由(1)知，C_1 与直线 $y=x+m$ 有公共点当且仅当存在 $x\in[0, 1]$使得 $1+\sqrt{1-x^2}=x+m$，即 $m=\sqrt{1-x^2}-x+1$. 当 $x\in[0, 1]$时，$-1\leqslant\sqrt{1-x^2}-x\leqslant 1$，因此 $0\leqslant m\leqslant 2$.

由题设知，C_2 与直线 $y=x+m$ 有公共点，当且仅当存在 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$，使得 $2\sin\alpha=2\cos\alpha+m$，即 $m=2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$. 当 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$时，$2<2\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 2\sqrt{2}$,因此 $2<m\leqslant 2\sqrt{2}$.

综上，m 的取值范围是$(-\infty, 0)\cup(2\sqrt{2}, +\infty)$.

23. 解：

(1)$f(x)=\begin{cases}-3x+2, & x<0,\\ x+2, & 0\leqslant x<2,\\ 3x-2, & x\geqslant 2.\end{cases}$

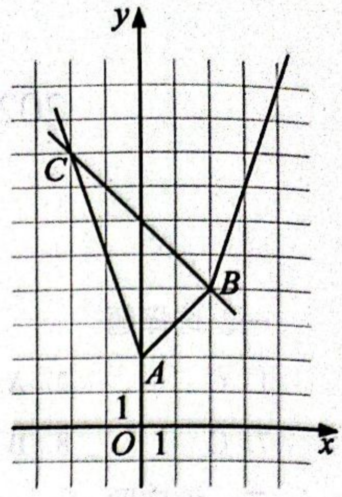
当 $x<0$ 时，$f(x)\leqslant 6-x\Leftrightarrow -3x+2\leqslant 6-x\Leftrightarrow x\geqslant -2$，得$-2\leqslant x<0$.

当 $0\leqslant x<2$ 时，$f(x)\leqslant 6-x\Leftrightarrow x+2\leqslant 6-x\Leftrightarrow x\leqslant 2$，得 $0\leqslant x<2$.

当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)\leqslant 6-x\Leftrightarrow 3x-2\leqslant 6-x\Leftrightarrow x\leqslant 2$，得 $x=2$.

因此不等式 $f(x)\leqslant 6-x$ 的解集为 $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 2\}$.

(2) 不等式组 $\begin{cases}f(x)\leqslant y,\\ x+y-6\leqslant 0\end{cases}$ 所确定的平面区域为 $\triangle ABC$ 所围成的平面区域，其中 $A(0,\ 2)$，$B(2,\ 4)$，$C(-2,\ 8)$，因此所求平面区域的面积为 8.



2023年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅰ卷

一、选择题

1. C　2. A　3. D　4. D　5. A　6. B

7. C　8. B

二、选择题

9. BD　10. ACD　11. ABC　12. ABD

三、填空题

13. 64　14. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$　15. $[2,3)$　16. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

四、解答题

17. 解：

(1)由题设可得 $C=45°$，从而 $2\sin(A-45°)=\sin(A+45°)$，即

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A,$$

得 $\sin A=3\cos A$.

所以 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2)由(1)得 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\sin B=\sin(A+C)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

由正弦定理得 $AC=\frac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=2\sqrt{10}$.

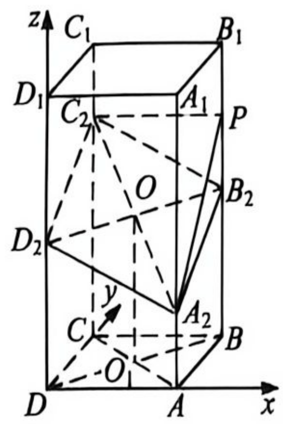
所以 AB 边上的高为 $AC\cdot\sin A=6$.

18. 解：

(1)连结 AC，A_2B_2. 设 A_2C_2，AC 的中点分别为 O，O_1. 连结 BD，B_2D_2，O_1O，由题设得 O_1O 是梯形 AA_2C_2C 的中位线，所以 $O_1O=2$. 由题设可得 $O_1O/\!/BB_2/\!/DD_2$ 且 $O_1O=BB_2=DD_2$，又 O_1 是 BD 中点，因此 O 是 B_2D_2 的中点，故 $A_2B_2C_2D_2$ 是平行四边形，所以 $B_2C_2/\!/A_2D_2$.

(2)以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，可得 $A_2(2,0,1)$，$C_2(0,2,3)$，$D_2(0,0,2)$.

设 $P(2,2,t)$，$0\leqslant t\leqslant 4$，则$\overrightarrow{A_2C_2}=(-2,2,2)$，$\overrightarrow{A_2D_2}=(-2,0,1)$，$\overrightarrow{A_2P}=(0,2,t-1)$.



设 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$ 是平面 $D_2A_2C_2$ 的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_2D_2}=0,\end{cases}$即

$\begin{cases}-2x+2y+2z=0,\\ -2x+z=0.\end{cases}$可取 $\boldsymbol{m}=(1,-1,2)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$ 是平面 PA_2C_2 的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_2C_2}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_2P}=0,\end{cases}$即

$\begin{cases}-x_1+y_1+z_1=0,\\ 2y_1+(t-1)z_1=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}=(t-3,t-1,-2)$.

故 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，即 $t^2-4t+3=0$，解得 $t=1$ 或 $t=3$.

综上，当二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150°时，$B_2P=1$.

19. 解：

(1) $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$，$f'(x)=ae^x-1$.

(ⅰ)若 $a\leqslant 0$，则$f'(x)<0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$单调递减.

(ⅱ)若 $a>0$，则由$f'(x)=0$ 得 $x=-\ln a$.

当 $x\in(-\infty,-\ln a)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\ln a,+\infty)$时，$f'(x)>0$. 故$f(x)$在$(-\infty,-\ln a)$单调递减，在$(-\ln a,+\infty)$单调递增.

(2)当 $a>0$ 时，由(1)知，当 $x=-\ln a$ 时，$f(x)$取得最小值，所以

$$f(x)\geqslant f(-\ln a)=a^2+\ln a+1.$$

从而$f(x)-\left(2\ln a+\dfrac{3}{2}\right)\geqslant a^2-\ln a-\dfrac{1}{2}$.

设 $g(x)=x^2-\ln x-\dfrac{1}{2}(x>0)$，则 $g'(x)=2x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-1}{x}$. 当 $0<x<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$g'(x)<0$；当 $x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，$g'(x)>0$. 所以 $g(x)$在$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$单调递减，在$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$单调递增. 故当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$.

从而当 $a>0$ 时，$a^2-\ln a-\dfrac{1}{2}>0$，即$f(x)>2\ln a+\dfrac{3}{2}$.

20. 解：

(1) 由题设得 $3a_1+3d=3a_1+a_1+2d$，故 $a_1=d$.

所以 $a_n=nd$，$b_n=\frac{n+1}{d}$，于是 $S_3=6d$，$T_3=\frac{9}{d}$.

故 $6d+\frac{9}{d}=21$，解得 $d=\frac{1}{2}$(舍去)或 $d=3$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=3n$.

(2) 由题设得 $\frac{12}{a_2}=\frac{2}{a_1}+\frac{12}{a_3}$，即 $\frac{6}{a_1+d}=\frac{1}{a_1}+\frac{6}{a_1+2d}$，解得 $a_1=d$ 或 $a_1=2d$.

当 $a_1=2d$ 时，有 $a_n=(n+1)d$，$S_n=\frac{n(n+3)d}{2}$，$b_n=\frac{n}{d}$，$T_n=\frac{n(n+1)}{2d}$. 当 $d>1$ 时，$S_{99}-T_{99}>99$，不符合题意.

当 $a_1=d$ 时，有 $a_n=nd$，$S_n=\frac{n(n+1)d}{2}$，$b_n=\frac{n+1}{d}$，$T_n=\frac{n(n+3)}{2d}$. 由题设得 $\frac{99\times100d}{2}-\frac{99\times102}{2d}=99$，解得 $d=-1$(舍去)或 $d=\frac{51}{50}$. 因此 $d=\frac{51}{50}$.

21. 解：

(1) 第 2 次投篮的人是乙，共有下面两种情况：

第 1 次投篮的人是甲且甲未命中，概率为 $0.5\times(1-0.6)=0.2$；

第 1 次投篮的人是乙且乙命中，概率为 $0.5\times0.8=0.4$.

所以第 2 次投篮的人是乙的概率为 $0.2+0.4=0.6$.

(2) 设 A_k 表示事件“第 k 次投篮的人是甲”，记 $p_k=P(A_k)$，$k=1, 2, \cdots, i$.

当 $k\geqslant2$ 时，第 k 次投篮的人是甲，共有下面两种情况：

第 $k-1$ 次投篮的人是甲且甲命中，概率为 $P(A_{k-1})\times0.6=\frac{3}{5}p_{k-1}$；

第 $k-1$ 次投篮的人是乙且乙未命中，概率为 $P(\overline{A_{k-1}})\times(1-0.8)=\frac{1}{5}(1-p_{k-1})$.

所以当 $k\geqslant2$ 时，$p_k=\frac{3}{5}p_{k-1}+\frac{1}{5}(1-p_{k-1})=\frac{2}{5}p_{k-1}+\frac{1}{5}$，即

$$p_k-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_{k-1}-\frac{1}{3}\right)，得 p_k=\frac{1}{3}+\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}.$$

又 $p_1=\frac{1}{2}$，所以第 i 次投篮的人是甲的概率为 $p_i=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$.

(3) 设随机变量 $X_i=\begin{cases}1, & 第 i 次投篮的人是甲,\\ 0, & 第 i 次投篮的人是乙\end{cases}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，则 X_i 服从两点分布，

$P(X_i=1)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$，且 $Y=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$. 由题设可得

$$E(Y)=E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}\right]=\frac{n}{3}+\frac{5}{18}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right].$$

22. 解：

(1)设点 $P(x, y)$，则 $|y|=\sqrt{x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}$，得 $y=x^2+\frac{1}{4}$，即 W 的方程为 $y=x^2+\frac{1}{4}$.

(2)设点 A，B，C 的坐标分别为 $\left(a, a^2+\frac{1}{4}\right)$，$\left(b, b^2+\frac{1}{4}\right)$，$\left(c, c^2+\frac{1}{4}\right)$. 由于轨迹 W 关于 y 轴对称，不妨设 $b\geqslant 0$. 由于 $AB\perp BC$，直线 AB，BC 中恰有一条斜率大于 0，不妨设 AB 的斜率 $k>0$，则直线 AB 的方程为 $y=k(x-b)+b^2+\frac{1}{4}$，直线 BC 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x-b)+b^2+\frac{1}{4}$，代入 W 的方程可得 $a=k-b$，$c=-\frac{1}{k}-b$(由 $a\neq b$ 知 $k\neq 2b$).

则 $|AB|=|k-2b|\sqrt{1+k^2}$，$|BC|=\left(2b+\frac{1}{k}\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$，矩形 $ABCD$ 的周长为

$$L=2(|AB|+|BC|)=2\left(|k-2b|+\frac{2b}{k}+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+k^2}.$$

(i)当 $k<2b$ 时，$L>2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+k^2}$，记 $x=\sqrt{1+k^2}$，则 $\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+k^2}=\frac{x^3}{x^2-1}$. 考虑函数 $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}(x>1)$，$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$，故 $f(x)$ 在 $(1, \sqrt{3})$ 单调递减，在 $(\sqrt{3}, +\infty)$ 单调递增，在 $x=\sqrt{3}$ 处取得最小值 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 故 $L>2f(\sqrt{1+k^2})\geqslant 2f(\sqrt{3})=3\sqrt{3}$.

(ii)当 $k>2b$ 时，$L=2\left(k-2b+\frac{2b}{k}+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+k^2}$.

若 $k=1$，则 $L=4\sqrt{2}>3\sqrt{3}$；

若 $k>1$，则 $L=2\left[1+\frac{1}{k^2}+(k-2b)\left(1-\frac{1}{k}\right)\right]\sqrt{1+k^2}>2\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\sqrt{1+k^2}\geqslant 3\sqrt{3}$；

若 $k<1$，则 $L=2\left(\frac{1}{k}+2b-2bk+k^2\right)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}>2(1+k^2)\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}=2f\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\right)\geqslant 3\sqrt{3}$.

综上，矩形 $ABCD$ 的周长大于 $3\sqrt{3}$.

2023年普通高等学校招生全国统一考试

新课标Ⅱ卷

一、选择题

1. A　2. B　3. D　4. B　5. C　6. C

7. D　8. C

二、选择题

9. AC　10. AC　11. BCD　12. ABD

三、填空题

13. $\sqrt{3}$　14. 28　15. 2(其他正确答案同样给分)　16. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

四、解答题

17. 解：

(1)由题设知$\triangle ABD$面积为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故$\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{a}{2}\times\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，解得$a=4$.

由正弦定理得$\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin\left(B+\dfrac{2\pi}{3}\right)}$，即$5\sin B=\sqrt{3}\cos B$，因此$\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

(2)令$\angle ADB=\alpha$. 由余弦定理得

$$c^2=1+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{a}{2}\times\cos\alpha,\ b^2=1+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\times1\times\frac{a}{2}\times\cos(\pi-\alpha).$$

所以$b^2+c^2=2+\dfrac{a^2}{2}$，由题设可得$a=2\sqrt{3}$.

因为$\triangle ABD$和$\triangle ACD$面积均为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$，故$\sin\alpha=1$，$\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$b=c=2$.

18. 解：

(1)设$a_n=a_1+(n-1)d$，由题设得

$$S_4=4a_1+6d,\ T_3=4a_1+4d-12.$$

由$\begin{cases}4a_1+6d=32,\\4a_1+4d-12=16\end{cases}$解得$a_1=5$，$d=2$.

所以 $a_n=3+2n$.

(2) $T_{2n}=b_1+b_3+\cdots+b_{2n-1}+b_2+b_4+\cdots+b_{2n}$

$=a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}-6n+2a_2+2a_4+\cdots+2a_{2n}$

$=S_{2n}+2n^2-n$.

$T_{2n+1}=T_{2n}+b_{2n+1}=S_{2n+1}+2n^2-n-6$.

当 $n\geqslant1$ 时，$T_{2n}-S_{2n}=2n^2-n>0$，故 $T_{2n}>S_{2n}$；

当 $n>2$ 时，$T_{2n+1}-S_{2n+1}=2n^2-n-6>0$，故 $T_{2n+1}>S_{2n+1}$.

综上，当 $n>5$ 时，$T_n>S_n$.

19. 解：

(1) 由患病者指标的频率分布直方图可得患病者指标不大于 97.5 的频率为 $0.002\times(97.5-95)=0.5\%$，因此临界值 $c=97.5$.

由未患病者指标的频率分布直方图可得未患病者指标大于 97.5 的频率为 $0.010\times(100-97.5)+0.002\times(105-100)=3.5\%$，因此误诊率 $q(97.5)=3.5\%$.

(2) 由频率分布直方图知

当 $95\leqslant c<100$ 时，

$$f(c)=0.002\times(c-95)+0.010\times(100-c)+0.002\times(105-100)=0.82-0.008c;$$

当 $100\leqslant c\leqslant105$ 时，

$$f(c)=0.002\times(100-95)+0.012\times(c-100)+0.002\times(105-c)=0.01c-0.98.$$

所以 $f(c)=\begin{cases}0.82-0.008c, & 95\leqslant c<100,\\ 0.01c-0.98, & 100\leqslant c\leqslant105.\end{cases}$

由于 $f(c)$ 在区间 $[95, 100]$ 单调递减，在区间 $[100, 105]$ 单调递增，所以 $f(c)$ 在区间 $[95, 105]$ 的最小值 $f(100)=0.02$.

20. 解：

连结 DE，AE.

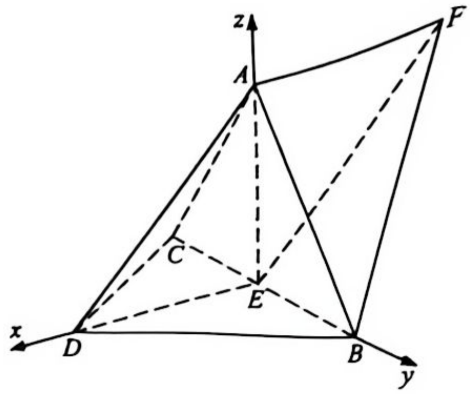
(1) 由题设知 $DE\perp BC$. 又由题设可知 $\triangle ADB\cong\triangle ADC$，所以 $AB=AC$，故 $AE\perp BC$. 因此 $BC\perp$ 平面 ADE，所以 $BC\perp DA$.

(2) 设 $DE=1$，由题设和(1)得 $BC=2$，$DA=DB=DC=AB=\sqrt{2}$，于是 $AE=1$，故 $AE^2+DE^2=DA^2$，所以 $AE\perp DE$.

以 E 为坐标原点，$\overrightarrow{ED}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$，则 $A(0, 0, 1)$，$B(0, 1, 0)$，$D(1, 0, 0)$，$F(-1, 0, 1)$，$\overrightarrow{AF}=(-1, 0, 0)$，$\overrightarrow{AB}=(0, 1, -1)$，$\overrightarrow{AD}=(1, 0, -1)$.

设平面 ABD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x, y, z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}y-z=0,\\ x-z=0,\end{cases}$可取 $\boldsymbol{m}=(1, 1, 1)$.



设平面 ABF 的法向量 $\boldsymbol{n}=(p, q, r)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}p=0,\\ q-r=0,\end{cases}$可取 $\boldsymbol{n}=(0, -1, -1)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

因此二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

21. 解：

(1)由已知得$\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}$，$c=2\sqrt{5}$，故 $a=2$，$b^2=c^2-a^2=16$.

所以 C 的方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

(2)设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，直线 MA_1：$y=m(x+2)$，直线 NA_2：$y=n(x-2)$.

由$\begin{cases}y=m(x+2),\\ 4x^2-y^2-16=0\end{cases}$得$(4-m^2)x^2-4m^2x-(4m^2+16)=0$.

由于$-2x_1=\dfrac{4m^2+16}{m^2-4}$，所以 $x_1=\dfrac{2m^2+8}{4-m^2}$，$y_1=\dfrac{16m}{4-m^2}$.

由$\begin{cases}y=n(x-2),\\ 4x^2-y^2-16=0\end{cases}$得$(4-n^2)x^2+4n^2x-(4n^2+16)=0$.

由于 $2x_2=\dfrac{4n^2+16}{n^2-4}$，所以 $x_2=\dfrac{2n^2+8}{n^2-4}$，$y_2=\dfrac{16n}{n^2-4}$.

由题设知$\dfrac{x_1+4}{y_1}=\dfrac{x_2+4}{y_2}$，故$(mn-4)(m+3n)=0$，由题意可知 $mn<0$，故 $m=-3n$.

点 $P(x, y)$满足：$y=m(x+2)$且 $y=n(x-2)$，所以 $x=-1$.

故点 P 在定直线上.

22. 解：

(1)令 $g(x)=x-\sin x$. $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，故 $g(x)$单调递增. 当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=0$，即 $\sin x<x$.

令 $F(x)=x-x^2-\sin x$. 当 $0<x<1$ 时，

$F'(x)=1-\cos x-2x=2\sin^2\dfrac{x}{2}-2x<2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-2x<0$，故 $F(x)$单调递减，

$F(x)<F(0)=0$，即 $x-x^2<\sin x$.

综上，当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$.

(2) $f(x)=\cos ax-\ln(1-x)-\ln(1+x)$，定义域为 $(-1,\ 1)$，且

$$f'(x)=\frac{2x-a(1-x^2)\sin ax}{1-x^2}.$$

不妨设 $a\geqslant 0$，$0<x<1$. 令 $h(x)=2x-a(1-x^2)\sin ax$.

当 $0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ 时，由(1)得，当 $x>0$ 时，$\sin x<x$，于是

$$h(x)\geqslant 2x-a^2x(1-x^2)=x(2-a^2+a^2x^2).$$

当 $0<x<1$ 时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增，从而 $f(x)>f(0)$，因此 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点.

当 $a>\sqrt{2}$ 时，由(1)得，当 $0<x<1$ 时，$\sin x>x-x^2$，于是当 $0<x<\dfrac{a-\sqrt{2}}{a^2}$ 时，

$$h(x)<2x-a^2x(1-x^2)(1-ax)<x[2-a^2(1-ax)^2]<0,$$

从而 $f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减.

又因为 $f(x)$ 是偶函数，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\ +\infty)$.

目　录

2025 年普通高等学校招生全国统一考试 …… 1

全国一卷 …… 1
全国二卷 …… 9

2024 年普通高等学校招生全国统一考试 …… 17

全国甲卷（理科） …… 17
全国甲卷（文科） …… 25
新课标Ⅰ卷 …… 33
新课标Ⅱ卷 …… 41

2023 年普通高等学校招生全国统一考试 …… 49

全国甲卷（理科） …… 49
全国乙卷（理科） …… 57
全国甲卷（文科） …… 65
全国乙卷（文科） …… 73
新课标Ⅰ卷 …… 81
新课标Ⅱ卷 …… 89

参考答案 …… 97

高考试题分析
（2027年版）

◎ 语　　文
◎ 数　　学
◎ 英　　语
◎ 文科综合　地理分册
◎ 文科综合　历史分册
◎ 文科综合　思想政治分册
◎ 理科综合　物理分册
◎ 理科综合　化学分册
◎ 理科综合　生物学分册
◎ 日　　语
◎ 俄　　语

★ 本书附2023—2025年高考全国卷

ISBN 978-7-5187-2795-7
定价：60.00元